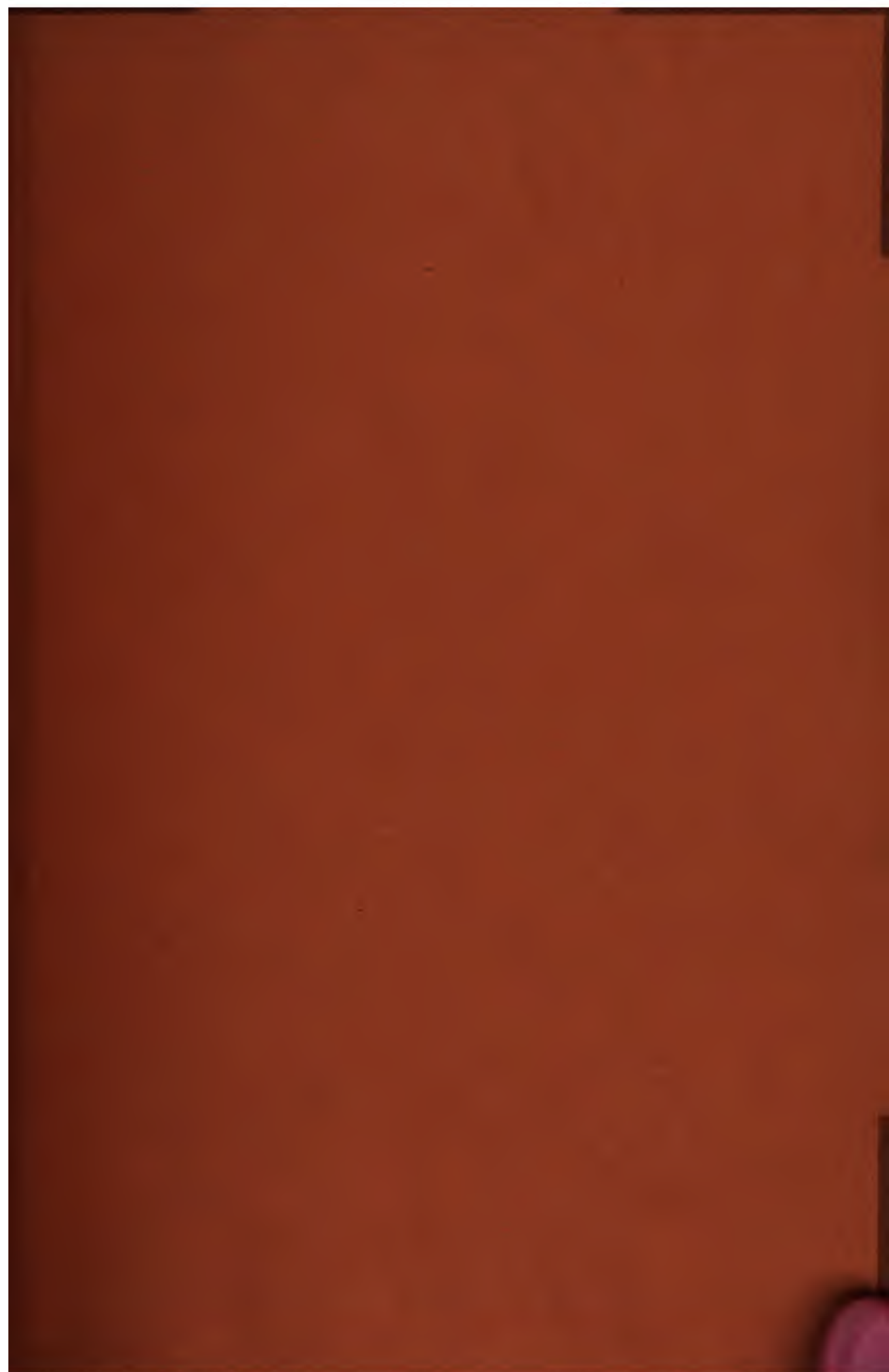




ANNALI

DELLA

R. SCUOLA NORMALE

SUPERIORE DI PISA

della Serie Vol. IV.

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Volume II.



PISA

TIPOGRAFIA T. NISTRI E C.

MDCCCLXXIX.



ANNALI

[illegible]

R. SCUOLA [illegible]

SUPERIORE [illegible]

---

della Serie [illegible]

SCIENZE [illegible]



INDICE



SULLA MISURA ELETTROSTATICA DELLE FORZE ELETTROMOTRICI D'INDUZIONE

STUDI SPERIMENTALI

DEL

D. LUIGI DONATI

Aiuto alla Cattedra di Fisica nella R. Università di Pisa

I.

Oggetto del presente lavoro; principî del metodo; cenno delle esperienze di Kohlrausch e di altri fatte collo stesso metodo.

1. Le forze elettromotrici, quali che ne sieno l'origine e le condizioni, possono venire studiate in due modi diversi: o misurando le cariche che producono a circuito aperto, oppure osservando la corrente cui danno luogo a circuito chiuso.

Di questi due metodi, cui per brevità distinguerò coi nomi rispettivamente di *elettrostatico* e *galvanometrico*, il primo è stato finora meno generalmente usato, forse per causa delle difficoltà sperimentali che d'ordinario ne rendono meno comodo l'uso. E tuttavia, come esso ha già reso importanti servigi alla scienza, io credo che possa renderne ancora, e che in certe ricerche possa andare innanzi per opportunità all'altro metodo e contribuire utilmente alla discussione di alcuni punti della teoria.

In grazia di quest'importanza, che ha a mio avviso il metodo elettrostatico, spero che non parrà senza interesse la relazione che ora presento di un mio studio sperimentale fatto con quel metodo sulle forze elettromotrici d'induzione. Esso si riferisce principalmente alla verificazione di leggi note in alcuni casi d'induzione per moto relativo, ed alla ricerca della legge secondo cui varia col tempo il magnetismo di una massa di ferro dolce nel periodo che segue immediatamente la chiusura o l'apertura della corrente che lo magnetizza, la qual legge si deduce dal modo con cui varia la forza elettromotrice indotta dal magnetismo del ferro in

una spirale vicina. Io offro i risultati di questo studio come un primo saggio delle applicazioni che si possono fare col mio apparecchio e col mio modo di sperimentare, la cui descrizione forma propriamente l'oggetto di questo breve lavoro.

2. Ogni forza elettromotrice ha per effetto di stabilire, da una parte e dall'altra del luogo in cui risiede, una determinata differenza dei valori del potenziale elettrostatico, la quale dipende solo dalla grandezza della forza elettromotrice stessa, e le serve di misura. Se le due parti non hanno fra loro altra comunicazione conduttrice che attraverso il luogo dove risiede la forza elettromotrice, il potenziale è costante dappertutto in ciascuna parte, e vi è *equilibrio statico*: in caso contrario si ha un circuito voltaico con corrente, e con quella distribuzione dei valori del potenziale che caratterizza *l'equilibrio dinamico*.

Per misurare nel primo caso la differenza dei valori che ha il potenziale dalle due parti, la quale dà la misura della forza elettromotrice; e nel secondo caso la differenza del potenziale in due punti quali si voglia del sistema, onde si rileva l'anzidetta legge di distribuzione, serve un elettrometro, sia mettendolo in relazione direttamente con i punti di cui si tratta, sia misurando con esso le cariche che da quei punti derivano in conduttori di determinata capacità, e ordinariamente in un apparecchio di condensazione.

Tutto ciò è ben noto, e s'applica a tutte le forze elettromotrici indistintamente. Solamente per ciò che riguarda le forze elettromotrici variabili col tempo, come quelle d'induzione, bisogna che l'anzidetta misura si riferisca ad epoche determinate. Ed inoltre, siccome lo stabilirsi dell'equilibrio statico o dinamico non è propriamente istantaneo, ma richiede un certo tempo (periodo variabile) che, sebbene sia sempre brevissimo, può non essere trascurabile di fronte ai tempi in cui si manifestano variazioni delle forze elettromotrici, potrà occorrere di dover tener conto anche di questa circostanza.

Se però sono semplici i principî su cui si fonda questo modo di studiare le forze elettromotrici, non tanto agevole ne è la pratica, ove se ne vogliano risultati esatti. Le difficoltà che presenta sempre ogni buona misura elettrostatica, più gravi qui per la piccolezza delle cariche che occorre di dover valutare, si accrescono poi quando si tratti di forze elettromotrici variabili col tempo. Tuttavia non sono insuperabili, e ponendovi le debite cure, il metodo è suscettivo di delicatezza insieme e precisione.

3. Per ciò che riguarda le forze elettromotrici che agiscono nelle pile idroelettriche abbondano i lavori di questo genere. Le così dette esperienze fondamentali di Volta ripetute e variate in tanti modi, la misura delle forze elettromotrici di contatto di metalli fra loro e di metalli con liquidi, lo studio della legge con cui varia il potenziale nei diversi punti del circuito di una pila, hanno formato il soggetto di numerose ricerche elettrostatiche, che è inutile rammentare perchè notissime e citate nei principali trattati (1). Tuttavia mi piace fra queste riferire brevemente alcune delle esperienze di Kohlrausch, come quelle che per grande accuratezza sono atte a servir di modello.

Queste esperienze costituiscono nel loro insieme (2) una splendida verificazione sperimentale dei principî su cui si fonda la teoria della pila. Furono fatte con un elettrometro di Dellmann, costrutto apposta e previamente graduato dallo stesso Kohlrausch (3), e con un condensatore a lamina d'aria. Quest'ultimo era formato di due dischi

(1) V. fra gli altri Wiedemann, Galvanismus; e Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik.

(2) Poggendorff's Annalen Vol. LXXII (1847), LXXV (1848), LXXVIII (1849), LXXIX (1850), LXXXII (1851), LXXXVIII (1853).

(3) Kohlrausch, Pogg. Ann. LXXII, LXXIV. Wüllner Lehrbuch der Physik V. II. p. 663.

metallici piani, ed ebbe nel corso delle ricerche due disposizioni diverse. In una i dischi erano sostenuti in posizione orizzontale da cordicelle di seta, ed il piatto inferiore in tre punti presso all' orlo era verniciato con gomma, sopra la quale si disponeva della ceralacca in modo da formare tre rialzamenti uguali, su cui veniva ad appoggiarsi il disco superiore che era verniciato nei tre punti corrispondenti [1]. Nell'altra forma l'intervallo fra i dischi è tutto occupato dall'aria; e i dischi sono sostenuti verticalmente su pezzi solidi [2].

Alcune serie di esperienze [3] ebbero per oggetto la determinazione dei valori numerici delle differenze di tensione (*Spannungsdifferenzen*) [4] dovute al contatto dei diversi metalli.

Per ogni coppia di metalli si adoperavano piatti del condensatore fatti di quei medesimi metalli. Si facevano comunicare fra loro un istante con un filo isolato, portando quindi or l'uno or l'altro in comunicazione coll' elettrometro.

Così si aveva senz' altro la misura cercata. La quale però essendo soggetta all' influenza delle alterazioni della capacità del condensatore, inevitabili al mutare dei piatti in ciascuna esperienza; Kohlrausch si valse di un secondo modo determinando indipendentemente da quella capacità il rapporto della differenza elettrica di ciascuna coppia a quella costante di un elemento Daniell, colle seguenti operazioni.

1) Si riunivano i poli della pila ai due piatti del

(1) Kohlrausch. Pogg. Ann. LXXV.

(2) Kohl. Pogg. Ann. Vol. LXXXVIII. Wiedemann Galvanismus I, 21.

(3) Pogg. Ann. LXXXII, LXXXVIII.

(4) Si usava allora di chiamare tensione elettroscopica o semplicemente tensione, come si fa ancora da alcuni, quello che ora con denominazione più propria si chiama potenziale.

condensatore, e si misurava poi la carica A all'elettrometro.

2) Si ripeteva la stessa operazione dopo invertite le comunicazioni coi piatti, e si misurava la carica B.

Supposta vera la legge delle tensioni, la semisomma $\frac{A+B}{2}$ rappresenta la differenza elettrica dei due metalli, data già direttamente dall'esperienza precedente, la quale serve così di controllo, e la semidifferenza $\frac{A-B}{2}$ rappresenta la differenza elettrica dell' elemento Daniell. Il quoziente $\frac{A+B}{A-B}$ dei due numeri dà il rapporto cercato.

Per rendere le misure indipendenti anche dalle variazioni dell' elemento, si facevano contemporaneamente le stesse operazioni con un secondo condensatore a piatti di rame e di zinco, che rimaneva sempre lo stesso in tutte le esperienze. Distinguendo con degli apici i numeri relativi al secondo condensatore, il quoziente dei due numeri $\frac{A+B}{A-B}$ ed $\frac{A'+B'}{A'-B'}$ dà il rapporto fra la differenza elettrica della coppia che si studia e quella della coppia rame-zinco.

Kohlrausch riferisce particolareggiatamente i risultati numerici delle singole operazioni per la coppia zinco-platino.

Condensatore zinco-platino				Condensatore zinco-rame			
	piatto zinco	piatto platino	media		piatto zinco	piatto rame	media
$Zn \mid Pt$	+ 4, 46	— 4, 46	4, 460	$Zn \mid Cu$	+ 3, 92	— 4, 05	3, 985
A	+ 11, 98	— 12, 02	12, 000	A'	+ 11, 00	— 11, 12	11, 060
B	— 3, 01	+ 2, 92	— 2, 965	B'	— 3, 15	+ 3, 01	— 3, 080

I valori $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A'+B'}{2}$ concordano con quelli ottenuti direttamente nella prima esperienza. Si ha poi

$$\frac{Zn|Pt}{Zn|Cu}=\frac{A+B}{A-B}:\frac{A'+B'}{A'-B'}=1,064.$$

Delle altre serie di esperienze del Kohlrausch mi limito a citar quella relativa alla distribuzione della tensione elettroscopica nei varii punti di un filo che chiudeva un elemento di Daniell (¹).

Indicando con D la forza elettromotrice dell'elemento, con L la lunghezza ridotta di tutto il circuito, con u_0 ed u rispettivamente le tensioni elettroscopiche in due punti del circuito e con λ la lunghezza ridotta del tratto compreso fra quei due punti, supposto omogeneo, si ha secondo la teoria di Ohm

$$u-u_0=\frac{D}{L}\lambda.$$

L'accennata serie di esperienze aveva per oggetto la verificazione di questa formula. L'elemento Daniell veniva chiuso con un sottile filo di ottone lungo 172,77 pollici, la cui lunghezza ridotta era espressa dal numero 474, mentre quella dell'intero circuito era L = 1117,5. Il valore di D determinato nel modo precedentemente descritto risultò 8,79, essendo Zn | Cu = 4 , 17.

Si aveva un condensatore coi due piatti d'ottone. Si prendevano sul filo due punti, uno fisso e l'altro ad una distanza dal primo variabile da esperienza a esperienza, e si ponevano in comunicazione mediante fili isolati coi due piatti del condensatore; o, ciò che è lo stesso (come dice

(¹) Pogg. Ann. LXXVIII, p. 1.

la teoria e come fu dapprima constatato direttamente), si poneva l'uno in comunicazione con uno dei piatti, e l'altro punto e l'altro piatto in comunicazione colla terra; e si misurava poi la carica.

Ecco alcuni numeri così ottenuti.

λ	u osservato	u calcolato
118. 5	0. 85	0. 93
237. »	1. 85	1. 86
355. 5	2. 69	2. 80
474. »	3. 70	3. 83

Nella 1.ª colonna sono indicate le distanze dei due punti espresse in lunghezza ridotta, nella 2.ª i valori di *u* dati dall'esperienza, e nella 3.ª i medesimi valori calcolati secondo la formola $u = \frac{D}{L}\lambda$.

Le citate esperienze insieme con le altre di *Kohlrausch* confermarono pienamente le considerazioni teoriche di Ohm; per le quali, dopo la sostituzione del concetto di potenziale a quello di tensione suggerita di poi da Kirchhoff (1), la teoria della pila fu ricondotta ai principî fondamentali dell'elettrostatica.

Lavori del genere dei sopraddescritti furono fatti pure da Gerland (2), Hankel (3) ed altri, e ultimamente da W. Thomson (4), cui si debbono di recenti ed importanti, e che ha recato a gran perfezione i metodi e gli apparecchi per le misure elettrostatiche.

(1) Pogg. Ann. LXXVIII, 506.
(2) Pogg. Ann. CXXXIII, 513 (1868).
(3) Pogg. Ann. CXV, 57; CXXVI, 286.
(4) Reports of the Brit. Assoc. 1867, e altrove. Maxwell, treatise on eletricity.

4. Per le forze elettromotrici d'induzione invece non sono state fatte finora, per quanto io mi sappia, di tali misure; e solamente i Fisici si sono limitati a dimostrare l'esistenza di elettricità libera alle estremità di un circuito indotto aperto.

Questo fatto del resto è noto fino dai primi tempi in cui fu scoperta l'induzione, e venne in vari modi constatato da parecchi sperimentatori. Du Bois-Reymond ([1]) lo dimostrò indirettamente per mezzo delle contrazioni di una rana. Masson e Breguet ([2]) sperimentarono con due lunghi fili di rame ravvolti in doppia spirale; uno dei quali era percorso dalla corrente di una forte pila in cui per mezzo di un interruttore si produceva una serie alternata di chiusure ed aperture; mentre le estremità dell'altro facevano capo alle due armature di un apparecchio a condensazione, e per mezzo di un commutatore si faceva in modo che al condensatore potessero giungere le azioni in un solo senso. Tenendo uno dei capi del filo indotto in comunicazione stabilmente con una delle armature, e avvicinando l'altro capo alla seconda armatura, scoccavano scintille, e le elettricità accumulate nel condensatore corrispondevano alla direzione della corrente indotta. Questo processo medesimo serve per caricare rapidamente una batteria di Leyda per mezzo del rocchetto di Ruhmkorff, o di altro grande apparecchio d'induzione.

Similmente Sinsteden ([3]) ha riconosciuta la presenza dell'elettricità libera alle estremità di spirali indotte, sia con un elettroscopio a foglie d'oro, sia traendone scintille colle dita.

Altri lavori dello stesso genere si potrebbero citare. E del resto i fenomeni di tensione nei circuiti indotti si ma-

([1]) Du Bois Reymond, Jahresbericht.
([2]) Ann. de Chim. et de Phys. IV, 129 (1842).
([3]) Pogg. Ann. XLIX, 353 (1846).

nifestano con tal forza ed evidenza, che si riguardano quasi come un carattere distintivo dell'induzione.

5. — Citerò infine una recente ricerca di Helmholtz [1], che per la forma data alle esperienze ha più analogia col mio studio, sebbene sia d'altro genere.

L'apparecchio consisteva in un pendolo di ferro, che fatto cadere da una determinata altezza produceva l'apertura successiva di due circuiti, inducente ed indotto, battendo con due denti di agata fissati lungo l'asta contro due piccole leve. Di queste una era fissa, e l'altra era portata da un pezzo mobile che si faceva avanzare mediante una vite micrometrica, per modo che si poteva regolare e valutare l'intervallo di tempo che correva fra le aperture dei due circuiti. Il circuito inducente fatto con 12 $\frac{1}{4}$ giri di 80 Cm. di diametro di filo di rame, era percorso dalla corrente di una coppia Daniell; e l'altro circuito di 560 giri di egual diametro aveva i suoi capi in comunicazione coi due piatti di un condensatore ad aria di Kohlrausch. Le cariche di questo venivano misurate con un elettrometro di Thomson.

All'aprire del primo circuito la forza elettromotrice d'induzione separa nell'altro le due elettricità, le quali si portano a caricare i due piatti del condensatore; e quindi nell'intervallo brevissimo di tempo che trascorre prima che s'interrompa la spirale indotta, si produce in questa una serie di oscillazioni elettriche [2], e conseguentemente una serie di cariche alternativamente di nome diverso nei piatti del condensatore. Di modo che la carica che dopo l'interruzione riman presa infine sul piatto collettore, e che viene poi misurata all'elettrometro, varia di nome e di grandezza

[1] Monatsberichte der Berl. Ak. Maggio 1871, p. 292.

[2] Queste oscillazioni sono del genere di quelle che si producono nell'arco di chiusura di una bottiglia di Leyda e costituiscono la così detta scarica oscillante. Esse sono state studiate analiticamente da Thomson, Kirchhoff ed Helmholtz.

á seconda della durata del tempo corso fra le due interruzioni.

Le esperienze di Helmholtz dirette a riconoscere se le azioni induttive impiegano a propagarsi un tempo apprezzabile, e propriamente se la velocità di propagazione è così piccola come aveva enunciato il Blaserna (550 m. al secondo nell'aria) (1) consistevano nel determinare con grande esattezza gli zeri delle oscillazioni elettriche ossia gli istanti in cui la carica del condensatore è nulla, e vedere se questi si spostavano col variare della distanza dei due circuiti; come doveva avvenire nel caso che fosse vera la proposizione del Blaserna.

II

Descrizione dell' apparecchio elettrometrico.

6. Io feci alcune prime esperienze di prova con un elettroscopio a foglia d'oro e condensatore di Bohenberger. Questo non essendo, come si sa, atto ad esperienze di misura, gli sostituii in breve l'apparecchio rappresentato dalla fig. I. Tav. I.

Prima di incominciare a descriverlo, convien ch'io avverta che in tutto questo studio ho cercato di valermi di mezzi il più possibilmente semplici, e quali si hanno alla mano in ogni gabinetto. Nello stesso tempo ho avuto in vista la semplicità e speditezza nel modo di sperimentare, mirando ad avere un apparecchio col quale l'uso delle misure elettrostatiche per le forze elettromotrici fosse facile e comodo.

L'apparecchio si compone di un elettrometro ed un condensatore, ed è contenuto dentro una grande cassa o

(1) Giornale di Scienze naturali ed economiche. Palermo 1870, Vol. VII.

intelaiatura a cristalli, che lo difende dalle agitazioni e dall' umidità dell' aria esterna.

L'elettrometro consiste in una delicata bilancia di torsione, il cui uso io debbo alla gentilezza del Prof. Felici, che lo costrusse per le sue ricerche sulle azioni induttive dei coibenti [1]. È fatto con lungo e sottilissimo filo d'argento, e le deviazioni si leggono per riflessione col sistema di Gauss e Weber.

Il filo di sospensione è attaccato con una morsetta metallica *g* alla parte inferiore di un'asta verticale di ebanite, la quale superiormente con la solita disposizione a micrometro è sostenuta da un doppio braccio di ferro impiantato nella parete della stanza. L'ago mobile *d* è tutto metallico e comunica per mezzo del filo di sospensione con la morsetta *g* dalla quale partono due altri fili simili, uno che va alla pallina fissa *p*, la quale è così costantemente in comunicazione coll'ago, e l'altro che fa capo ad una sferetta metallica *r* portata in cima da un'asticella di ebanite e munita di una punta. L'asticella è impiantata a cerniera sul fondo della cassa, e si può far girare dall'esterno per mezzo della manovella *m*; con che abbassandosi la pallina *r*, la punta viene ad immergersi in una vaschetta *s* con mercurio, che le sta sotto retta da un sostegno isolante, e che vien messa in relazione coi corpi che si vogliono far comunicare coll' elettrometro.

Il fusetto metallico verticale che regge l' ago si prolunga in basso in un' asticella di vetro, cui è attaccato con una piccola ghiera lo specchietto verticale che serve alla lettura delle deviazioni. Davanti allo specchio e fisso sopra un cristallo dell' intelaiatura sta un regolo traslucido colle divisioni del metro, le quali sono riflesse dallo specchietto ed osservate con un piccolo cannocchiale.

[1] Volumi dell' Accademia dei XL; Serie III, Tomo II, parte I. — Nuovo Cimento. Tomo V-VI, Gennaio 1872.

La bilancia è tutt' all'intorno con pareti di cristallo difesa dalle agitazioni dell' aria nell' interno della cassa.

Dentro la medesima cassa che contiene l' elettrometro è il condensatore fatto con due dischi di ottone A, B. Il disco inferiore B è montato orizzontalmente sopra un cilindro di ebanite retto da un piede con viti calanti, e l' altro disco A (piatto collettore) gli sta parallelamente di sopra portato da un manico di ebanite che si prolunga in un' asta d' ottone impegnata dentro due anelli direttori, i quali sono impiantanti sopra un regolo verticale unito solidamente all' intelaiatura. Per mezzo di una carrucola e di una funicella di seta si può, come si vede dalla figura, dal di fuori della cassa alzare ed abbassare il piatto, e mediante un contrappeso P tenerlo a qualsivoglia altezza. Le superficie opposte ben piane dei due dischi sono libere, ed il disco superiore, abbassandolo, viene a riposare sopra tre piccoli pezzetti uguali di ebanite posti sopra l'altro disco, rimanendo cosi interposto fra le due superficie un sottile strato di aria.

Un' asta metallica piegata ad angolo retto che attraversa l' intelaiatura per entro un cilindro forato *n* di ebanite, e col braccio interno terminato in una pallina d' ottone *o* si appoggia sul piatto A, ed all' estremità esterna dell' altro braccio è munita di un serrafili *a*, serve a stabilire o togliere la comunicazione del piatto A coll' esterno; mentre un sottile filo d' argento che per un capo è saldato ad una lamina metallica posta sopra il piatto, e dall'altro termina alla vaschetta *s* di mercurio, serve a farlo comunicare coll' elettrometro. Per l' altro piatto B si ha semplicemente un filo di rame condotto fuori per un foro praticato nel cristallo ed un serrafili *b* alla sua estremità.

Credo che questa breve descrizione basti coll' aiuto della figura a far intendere la disposizione generale dell'apparecchio. In fine di questo capitolo sono notate le di-

mensioni di talune delle sue parti, ed ora aggiungerò alcune indicazioni ed avvertenze speciali.

7. Tutti i pezzi isolatori sono di ebanite: la loro superficie è stata accuratamente pulita lavando con alcool rettificato ed asciugando poi con un pannolano ben netto ed asciutto. Il piano inferiore di legno dell'intelaiatura ed i regoli sono coperti di una densa vernice ad olio per impedire l'accesso all'umidità. Una cassetta posta al di sotto di quel piano contiene della calce caustica per togliere l'umidità dell'interno, ed è disposta in modo che si può cambiare la calce senza mutare null'altro nell'apparecchio. Prima di dare la vernice, nell'interno della cassetta della calce e sul piano dell'intelaiatura si è distesa della tela con colla forte per maggiore riparo dall'umidità esterna e per ovviare al fendersi dal legno. Il quale è di per se secchissimo, essendo che l'intelaiatura è costrutta già da varii anni, ed è stata quasi sempre chiusa con dentro calce soventemente rinnovata ed anche vasi contenenti acido solforico.

Un igrometro a capello posto dentro la cassa e che si osserva dall'esterno serve a constastare la secchezza dell'aria.

8. L'ago mobile della bilancia termina con un sottile dischetto *d* in luogo della solita pallina; con che si ha un minor momento d'inerzia, e si guadagna in rapidità delle deviazioni ed in sensibilità.

Le due parti, mobile e fissa, della bilancia sono, come dissi già, stabilmente in comunicazione fra loro. Così le indicazioni sono pronte e sicure, mentre con l'ordinaria disposizione delle due palline isolate, l'ago è in ogni esperienza prima attratto e poi respinto dalla pallina fissa, con perdita di tempo sempre dannosa a causa della dispersione e dell'elettrizzarsi delle parti coibenti. Oltracciò le irregolarità del movimento provenienti dall'urto delle due palline, se sono senza influenza sulla grandezza della deviazione

fissa a cui si dispone l'ago alla fine delle sue oscillazioni, possono però far variare la deviazione impulsiva: della quale appunto, pel vantaggio che si ha ad operare con rapidità, io mi son valso nelle mie esperienze.

Solamente, mentre con le due palline isolate è nota, almeno approssimativamente, la relazione che passa fra la posizione dell'ago e la forza corrispondente con cui per una data carica si respingono le due palline, e quindi anche la relazione fra le cariche e le deviazioni fisse che ad esse corrispondono, con la disposizione attuale tal relazione è ignota. Ma di questo e del modo ch'io ho tenuto per apprezzare le indicazioni parlerò più partitamente in un capitolo speciale.

Nei primi tempi che la bilancia fu costrutta era difficile servirsene per la sua instabilità. Ora invece è molto stabile, e si mantiene talvolta per ore intiere immobile in una medesima posizione di riposo; e la riprende rapidamente dopo la deviazione in ogni esperienza. Le piccole variazioni cui tuttavia va soggetta la sua posizione di riposo, sono lente e regolari, e seguono l'andamento delle variazioni di temperatura della stanza, e più propriamente delle variazioni dell'irradiazione calorifica che dalle diverse parti della stanza proviene ai diversi lati del filo di sospensione. La stanza è posta a pianterreno e molto riparata dall'influenza dei bruschi mutamenti di temperatura esterna.

9. La disposizione ch'io ho adottata per il condensatore è la migliore che, per l'uso a cui è destinato nelle mie esperienze, mi è parso di poter avere colla semplicità di mezzi ch'io m'era prefissa. La quale escludeva l'uso di un condensatore interamente ad aria, che non può servire che a patto di essere di costruzione squisita, quale non può aversi che da pochi costruttori eccellenti e con grave dispendio. È noto infatti quanto sia difficile in tali istrumenti di conseguire l'invariabilità della posizione dei due piatti,

per modo che la capacità del condensatore rimanga costante nelle diverse esperienze.

In sulle prime io tentai di servirmi di due dischi verniciati con gomma lacca, allettato dalla comodità di un tale sistema, e dalla grande capacità che ne risulta al condensatore per l'estrema sottigliezza che si può dare così allo strato isolante. Ma i risultati furono poco soddisfacenti, essendochè i numeri ottenuti sperimentando nelle stesse condizioni in diverse volte non erano abbastanza costanti, ed inoltre per una medesima differenza di potenziale si ottenevano risultati notevolmente diversi secondo il segno, ossia secondo che l'elettricità raccolta sul piatto collettore era positiva o negativa. Questi errori provenivano evidentemente dalle variazioni della capacità del condensatore per le ineguaglianze inevitabili dello strato di vernice, e dall'elettrizzamento di questa sia per istrofinamento, sia per la penetrazione delle cariche.

Abbandonato perciò quel sistema, dopo varie prove venni alla disposizione attuale. La quale, salvo il diverso modo di sostenere i piatti, è analoga alla prima maniera dèl condensatore di Kohlrausch; solo alla ceralacca è sostituita l'ebanite, che senza essere meno isolante, presenta il vantaggio di essere più resistente ed atta a foggiarne dei pezzetti che reggano senza deformarsi il peso del piatto sovrapposto.

Per farli io tagliava da una sottile lamina di ebanite in una parte che fosse ben piana e di spessore uniforme tre dischetti di poco più di un millimetro di diametro, e prendeva quindi ad intagliarne pazientemente il contorno in modo da ridurli alla forma di tronchi di cono con la base superiore strettissima. Poi lavatili diligentemente con alcool rettificato ed asciugatili, li faceva aderire per la base più larga in tre punti equidistanti del piatto B presso al contorno, per mezzo di una minima quantità di gomma lacca. Ho tralasciato di verniciare come faceva Kohlrausch, i due

piatti nei luoghi corrispondenti ai tre pezzetti d'ebanite per togliere più che fosse possibile le cause d'elettrizzamento, avendo riconosciuto coll' esperienza che anche senza ciò l'isolamento era sufficiente.

La posizione del piatto B si regola coll'aiuto delle viti calanti in modo che l'altro piatto, quando si abbassa, viene a coprirlo esattamente toccando a un tempo tutte tre le punte di ebanite, e vi si adagia sopra obbedendo al proprio peso, poichè il sistema che lo regge, per l'elasticità del lungo manico e perchè questo scorre un po' agevolmente dentro gli anelli direttori, non è perfettamente rigido.

In questo modo, se i tre pezzi di ebanite sono di egual altezza, e le superficie dei piatti ben piane, queste si dispongono esattamente parallele; ma in ogni caso prendono sempre la medesima posizione relativa, che è quello che principalmente importa, e così la capacità del condensatore è invariabile. Ciò è attestato dalla costanza quasi perfetta dei risultati ottenuti nelle stesse condizioni in diverse esperienze, come si vedrà dai numeri che riferirò in seguito.

Non son riuscito colla presente disposizione a togliere del tutto la differenza di risultati per le due elettricità, che ho accennato dianzi: essa è però sommamente ridotta, e si può farne la correzione nel modo che dirò in appresso. Potrebbe credersi che tal differenza fosse dovuta all'influenza delle parti coibenti di ebanite, le quali una volta che per avventura siansi elettrizzate agiscono per influenza a distanza, o, come suol dirsi, elettroforicamente. Ma le precauzioni prese dovevano escludere in gran parte questo inconveniente. Perciocchè, oltre all'avere adottato un modo di sperimentare che per la sua rapidità dà poco campo all'elettrizzarsi delle parti coibenti per penetrazione delle cariche, ho avuto cura di tenere le superficie del condensatore lontane dai sostegni di ebanite, impiantando i piatti non direttamente su questi, ma coll'intermezzo di pezzi metallici,

e di fare per quanto si poteva piccolissime le tre punte di ebanite. Ed infatti l'esperienza ha dimostrato che siffatta influenza era poco sensibile; poichè procurando di esagerarla coll'elettrizzare apposta e fortemente i sostegni e le punte, non si avevano variazioni molto notevoli nei risultati.

Maggiore influenza ha invece un'altra circostanza di cui io non aveva tenuto conto in principio, ed è lo stato della superficie dei piatti d'ottone del condensatore. Una piccola diversità che vi sia nella condizione delle due superficie opposte, ottenuta p. es. strofinando una di esse con un pannolano, agisce come una forza elettromotrice, che aggiunta in più o in meno alla differenza di potenziali per cui si sperimenta, produce l'accennata diversità di risultati. Sebbene questa sia tutt'altro che cosa nuova, perchè si riduce in sostanza al fatto ben noto delle variazioni che produce nelle forze elettromotrici di contatto dei metalli, l'alteramento della loro superficie, io non vi aveva dapprima posto mente, e persi del tempo ricercando altrove la ragione degli errori. Riconosciuta la vera causa, feci di poi varie osservazioni in proposito, di cui dirò solo che mi dimostrarono come le alterazioni anche minime abbiano grande influenza, la quale per la difficoltà di ottenere e conservare l'identità delle due superficie è difficile togliere del tutto. Tuttavia colla cura presa di poi di trattar sempre i due piatti a condizioni uguali, dopo averli diligentemente ripuliti ambedue allo stesso modo, son riuscito a ridurre entro limiti assai ristretti la differenza dei risultati per le due elettricità, la quale così rimpiccolita può anche dipendere in tutto o in parte dalla prima causa, che non posso esser certo di aver eliminata interamente.

Un' altra cosa a cui bisogna aver cura è che non si depositi della polvere fra i due piatti, la quale altererebbe la capacità del condensatore, e favorirebbe il passaggio dell' elettricità dall'uno all'altro. Per questo io ho sempre

tenuto il piatto superiore calato nel tempo che non esperimentava. Del resto rimanendo la cassa sempre chiusa, l'aria vi è tranquilla e vi è poco a temere del polverio.

10 Ecco ora l'indicazione sommaria delle operazioni relative a ciascuna esperienza coll'apparecchio descritto.

1) Si nota, guardando col cannocchiale, la posizione di riposo dell'elettrometro.

2) Si mettono i due corpi a diverso potenziale, cioè i poli corrispondenti alla forza elettromotrice da misurarsi, in comunicazione coi due serrafili *a* e *b*, o, ciò che è lo stesso, si mette l'uno dei poli in comunicazione col serrafili *a*, mentre l'altro polo ed il serrafili *b* si riuniscono alla terra; e poi si fa toccare un istante la sferetta *o* sul piatto superiore A.

3) Si solleva questo, tirando la funicella, fino ad una data altezza che è determinata dalla corsa dell'asta dentro gli anelli, mentre girando la manovella *m* vien messo in comunicazione coll'elettrometro.

4) Si va al cannocchiale a leggere la deviazione impulsiva, al che dà tempo la lentezza del movimento dell'ago.

5) Si tolgono le comunicazioni del serrafili *a* colla sorgente elettrica, e si fa comunicare col suolo; e poi toccando colla pallina *o* il piatto A si scarica l'elettrometro. Dopo di che riabbassando il piatto si rimettono le cose allo stato iniziale.

Tutto ciò si può fare da un solo sperimentatore e in meno di un minuto; e dopo altri due minuti l'ago è già perfettamente in riposo e pronto per una nuova esperienza; quantunque in tutte le mie esperienze io abbia creduto conveniente porre fra l'uno e l'altro un tempo alquanto maggiore.

Tutte le operazioni si fanno senza bisogno di aprire la cassa, la quale aggiustato che sia il condensatore, rimane costantemente chiusa.

Io soleva per comodità tenere la pallina r costantemente abbassata e con la punta immersa nel mercurio della vaschetta, con che il piatto A era in comunicazione permanente coll'elettrometro. Ciò si poteva fare senza inconvenienti, poichè i potenziali su cui io aveva a sperimentare erano troppo piccoli per produrre alcuna deviazione prima del sollevamento del piatto.

Sperimentando come precedentemente, ma senza alcuna forza elettromotrice, non accadeva mai di osservare alcun segno di deviazione; il che è una prova del buon andamento dell'apparecchio.

S'intende che in queste operazioni bisogna avere l'avvertenza di non toccare direttamente colle mani i piatti ed i fili metallici. Io mi serviva di fili rivestiti di guttaperca, ed usava per maggior precauzione di maneggiarli tenendoli in cima di bastoncelli di ceralacca o ebanite, o infilati in tubi di vetro.

11 — Insieme col condensatore predetto io mi son servito talvolta di un secondo condensatore più grande e di maggiore capacità, che è rappresentato dalla fig. II. È contenuto in una cassa a cristalli separata dalla precedente e più piccola, e provvista come quella di sportelli e di cassetta per calce.

Non mi occorrono molte parole a descriverlo, poichè esso è in tutto uguale al precedente, salvo la maggior grandezza di piatti ed il diverso modo con cui è retto il piatto superiore B'. Questo è attaccato coll'interposizione di un pezzo di ebanite all'estremità di una solida sbarra di ferro LL', imperniata pel suo mezzo in una staffa metallica sopra una colonna verticale T, a guisa del giogo di una bilancia. Quando la sbarra è disposta orizzontalmente, la superficie piana del piatto B' che è volta in basso e pure orizzontale, s'adagia coll'intermezzo delle tre punte di ebanite sul piatto inferiore A'. L'altro braccio L' della sbarra attraversa una parete di

legno della cassa per una fenditura verticale F, munita di regoli metallici, fra i quali il braccio scorre a sfregamento, quando lo si abbassa o si alza per alzare od abbassare il piatto B' dal di fuori della cassa. L'altezza a cui vien sollevato nelle esperienze è determinata dalla corsa del braccio dentro la fenditura. Una specie di borsa di gomma elastica attaccata alla sbarra ed agli orli della fenditura, e che non si vede nella figura, serve a chiudere l'accesso all'aria esterna senza impedire il movimento della sbarra. Quanto al resto, tutto quello che ho detto per l'altro condensatore si applica esattamente anche a questo.

Del quale poi mi son servito sempre in unione col primo nel modo seguente. I serrafili *a* e *a'* erano tenuti stabilmente in comunicazione fra loro con un filo isolato ed i serrafili *b* e *b'* colla terra. Abbassata la sferetta *o* sul piatto A, con che i due piatti *A*, *A'* eran riuniti in un solo collettore, si facèva comunicare un istante *a* con la sorgente elettrica, e subito dopo si sollevava il piatto B'. La carica raccolta sui due piatti si porta così nella massima parte sul piatto A, dove, sollevando la sferetta *o*, rimane racchiusa, e poi si misura coll'elettrometro nel modo solito.

Con questo sistema si ha maggior sensibilità che con un condensatore la cui capacità fosse eguale alla somma delle capacità dei due: poichè così raccogliendosi l'elettricità in uno spazio più ristretto, è maggiore la carica che va all'elettrometro; e si ha di più il vantaggio di sperimentare con piatti più piccoli, il che è più comodo e meno soggetto ad errori.

Ma la ragione principale che mi ha consigliata questa disposizione si è che essa offre un mezzo comodo, sperimentando ora col solo condensatore A ed ora con ambedue, di far variare in un modo determinato e misurabile la sensibilità dell'apparecchio; per guisa che questo può applicarsi a forze elettromotrici la cui grandezza varii fra limiti più estesi, e le misure fatte coi due modi sono fra loro compa-

rabili. Ciò m'era necessario per lo scopo ch'io m'era proposto, e non ho visto altro mezzo migliore per ottenerlo. Perciocchè col sistema adottato per il condensatore, io non poteva pensare a far variare da volta a volta in una medesima serie di esperienze la distanza dei piatti, cambiando le punte di ebanite, il che importerebbe operazioni lunghe e agitazioni dannose per l'apparecchio.

Questo sistema di due condensatori in fine potrebbe anche all'uopo servire ad accrescere le cariche col metodo del condensatore a tre piatti di Peclet e del doppio condensatore di Pfaff e Svanberg; oppure anche caricando più volte di seguito il condensatore A' colla medesima sorgente da solo con la sferetta *o* sollevata, e trasportando volta per volta la carica all'altro condensatore coll'abbassare la sfera *o* ogni volta che si alza il piatto B'. Io però non mi sono mai servito nelle misure di nessuno di questi processi, nei quali le cause di errore accumulandosi rendono illusorio il vantaggio della maggiore sensibilità che con essi si ottiene.

12. Chiuderò questa descrizione indicando in millimetri le dimensioni di alcune parti dell'apparecchio.

Lunghezza del filo di sospensione della bilancia.	850, —
Lunghezza dell'ago mobile	80, —
Diametro del dischetto *d* che è all'estremità dell'ago	12, —
Diametro della pallina fissa *p*	14, —
Distanza della scala dallo specchio . . .	500, —
Diametro dei piatti del condensatore A. . .	180, —
» del condensatore A' . . .	300, —
Altezza delle punte di ebanite, circa . . .	0, 5

L'ultimo numero è solamente approssimativo, poichè le punte furono cambiate alcune volte nel corso delle ricerche, senza badar molto alla loro altezza assoluta, pur mantenendosi vicini al mezzo millimetro, e solo avendo cura che fossero di eguale altezza le tre che servivano per uno stesso condensatore.

III

Graduazione dell'elettrometro

13. La scala è divisa in centimetri e millimetri e si estende per 35 centimetri o gradi. È posta in modo che lo zero corrisponde alla posizione dell'ago a contatto colla pallina fissa. Sperimentando però si tiene sempre l'ago distaccato, e quindi la posizione di riposo della bilancia scarica, la quale vien regolata e mantenuta col micrometro, non corrisponde allo zero ma ad una determinata divisione della scala.

Indichiamo con α l'angolo di cui l'ago in una data posizione è deviato dalla posizione di contatto colla pallina fissa, con α_0 l'angolo della posizione di riposo, con e la quantità d'elettricità comunicata al sistema. La forza ripulsiva che si esercita in quella data posizione fra l'ago e la pallina fissa è

$$e^2 \varphi(\alpha) ,$$

essendo $\varphi(\alpha)$ una funzione che dipende dalla legge con cui l'elettricità si distribuisce nel sistema, cioè dalla forma di questo, e nel nostro caso è ignota e mal atta a determinarsi col calcolo.

Si possono però determinare i rapporti delle cariche e indipendentemente dalla funzione φ, riportando l'ago per mezzo del micrometro sempre ad una medesima posizione determinata, e misurando la torsione θ che in quella posizione fa equilibrio alla forza elettrica di ripulsione. Si ha allora

$$\frac{e}{e'} = \sqrt{\frac{\theta}{\theta'}} .$$

Ove senza toccare il micrometro si lasci l'ago a se stesso, dopo qualche oscillazione esso si dispone in equilibrio in una posizione α (deviazione fissa) tale che

$$e^2\varphi(\alpha) = k(\alpha - \alpha_0),$$

essendo k la costante di torsione. Così il rapporto $\frac{e}{e'}$ di due cariche è dato dall'espressione

$$\sqrt{\frac{\varphi(\alpha')}{\varphi(\alpha)}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha' - \alpha_0}}$$

la quale contiene il fattore incognito $\sqrt{\frac{\varphi(\alpha')}{\varphi(\alpha)}}$. Onde per far delle misure con questo modo, bisogna aver prima graduato l'elettrometro determinando coll'esperienza e consegnando in una tavola i valori di $\sqrt{\frac{\varphi(\alpha')}{\varphi(\alpha)}}$ relativi ai varii angoli α. Così ha fatto p. es. Kohlrausch con l'elettrometro di Dellmann per le esperienze già citate.

Si può infine lasciando l'ago a se stesso tener conto della sua prima deviazione impulsiva, ossia dell'angolo a cui l'ago arriva nel suo primo movimento di andata, fermandovisi per retrocedere. L'equazione del movimento dell'ago, indicando con m il suo momento d'inerzia, e ponendo per brevità: $f = e^2\varphi(\alpha) - k(\alpha - \alpha_0)$, sarebbe, non tenendo conto della resistenza dell'aria,

$$m\frac{d^2\alpha}{dt^2} - f = o,$$

il cui integrale primo è

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \int_{\alpha_0}^{\alpha} f d\alpha = o.$$

La deviazione impulsiva a essendo quell'angolo per cui la velocità dell'ago diviene nulla, è data dalla equazione precedente facendovi $\frac{d\alpha}{dt}=0$, ossia dall'equazione

$$\int_{\alpha_0}^{a} f d\alpha = F(a, e) = 0 ;$$

dalla quale risoluta rispetto ad e si avrebbe

$$e = \psi(a) .$$

Ma la funzione ψ è di per sè sconosciuta come la φ da cui dipende; di modo che, se si vuole poter misurare le cariche per mezzo delle deviazioni impulsive, occorre determinarla prima direttamente con l'esperienza, cioè fare la graduazione dell' istrumento.

È questo che io ho fatto per il mio apparecchio: solo che invece della funzione ψ dell'ultima equazione, ho presa la funzione ψ' corrispondente all'equazione

$$e = \psi'(x) ,$$

dove x rappresenta il numero di divisioni contate sulla scala partendo dalla posizione di riposo dell' ago.

14 Prima di tutto però io doveva accertarmi che col mio apparecchio e con questo modo delle deviazioni impulsive era soddisfatta la condizione, essenziale per ogni metodo di misura, della costanza dei numeri ottenuti nelle stesse circostanze.

Le molte esperienze fatte apposta per questo, e più ancora l'uso giornaliero e continuato dell'apparecchio, mi han provato che quella condizione era soddisfatta nel modo migliore. Riporto qui per saggio alcuni numeri, tolti a

caso dal giornale delle esperienze, relativi alla determinazione della forza elettromotrice di alcune pile.

Le esperienze a cui si riferiscono questi numeri furono fatte nel modo che ho descritto di sopra mettendo un polo della pila in comunicazione col piatto collettore, e l'altro polo ed il secondo piatto in comunicazione colla terra. La prima e la seconda serie furono fatte col condensatore piccolo A, la terza con i due condensatori riuniti.

Il primo numero di ciascuna osservazione indica la posizione di riposo della bilancia scarica, il secondo indica la deviazione impulsiva. La lettura dà direttamente i decimi di grado o millimetri della scala, ma al bisogno si possono valutare ad occhio i mezzi decimi ed anche frazioni più piccole.

Ogni esperienza è fatta due volte di seguito invertendo le comunicazioni, per modo da avere nell' elettrometro prima l'una e poi l'altra delle due elettricità; e i numeri così ottenuti sono riferiti l'uno a lato dell'altro in due colonne. Come dissi già, le due serie di numeri non sono uguali; le differenze però son piccole, e si può eliminare, almeno in gran parte l'errore, prendendo la media delle due deviazioni, quale è notata nella terza colonna.

		El. +	El. —	Media delle deviazioni
1 Bunsen Cond. A	1.ª esp.	1. » — 12. 8	1. » — 12. 5	11. 65
	2.ª	1. » — 12. 7	1. » — 12. 5	11. 60
	3.ª	1. » — 12. 8	1. » — 12. 5	11. 65
2 Bunsen	1.ª	1. » — 33. 3	1. » — 32. 9	32. 10
Cond. A	2.ª	1. » — 33. 5	1. » — 33. »	32. 25
1 Daniell Cond. A + A′	1.ª	1. » — 32. 2	1. » — 31. 7	30. 95
	2.ª	1. » — 32. 2	1. » — 31. 6	30. 90
	3.ª	1. » — 32. 1	1. » — 31. 6	30. 85

In grazia delle cure già indicate, prese per la secchezza dell'aria e per la buona condizione delle parti coibenti dell'apparecchio, l'isolamento è eccellente e la dispersione piccolissima. Io ho verificato ciò direttamente più volte osservando per lungo tempo l'elettrometro dopo che aveva ricevuto la carica del piatto A sollevato al modo solito e mantenuto in alto. Dopo un certo numero di oscillazioni l'ago prendeva una deviazione fissa che rimaneva pressochè invariabile per gran tempo non decrescendo che lentissimamente.

Nel mio modo di sperimentare poi l'effetto della dispersione è trascurabile affatto, come risulta da questo che prolungando, come feci apposta varie volte, la durata di un'esperienza anche di tre o quattro minuti, non si aveva variazione sensibile dei risultati.

15 In tutte le esperienze del precedente prospetto la posizione di riposo dell'ago era a 1 grado, cioè alla decima divisione della scala. Tal posizione si regola col micrometro. Come ho già accennato, essa è per sè soggetta a lente variazioni per lo più regolari e periodiche. Queste sono più sensibili in certi mesi dell'anno e in certe ore del giorno. Nei bei giorni d'estate, in cui per la massima parte furono fatte le mie esperienze, si presentano solo nelle prime ore del mattino e nella sera, e sono quasi insensibili dalle ore 10 antim. alle 3 pom.

La predetta posizione a 1 grado è quella che io ho prescelta e tenuta prossimamente costante nel corso di queto studio. A rigore si sarebbe dovuto graduare l'apparecchio per una posizione determinata, e mantenere poi questa esattamente costante in tutte le esperienze, oppure avere una graduazione distinta per ogni diversa posizione. Siccome però l'una e l'altra cosa sarebbe riuscita incomoda, io ho preso a ricercare se si poteva nella graduazione e nelle successive esperienze lasciar variare un poco la posizione di riposo, sempre però dentro limiti ristretti (da 0,7 ad 1,3),

studiando preventivamente l'influenza di tali piccole variazioni. Ho trovato così che dentro quei limiti le deviazioni contate dalla posizione di riposo sono sensibilmente indipendenti da questa, cosicchè le sue variazioni non nocciono alle misure. Così non si è obbligati che di rado a toccare il micrometro, con risparmio di tempo e fatica.

Ecco alcuni numeri in proposito

		El. +	El. —	Media delle deviazioni
Forza elettrom.	1ª.	0. 6 — 12. 3	0. 6 — 12. »	11. 55
di 1 Bunsen.	2.ª	1. » — 12 8	1. » — 12. 4	11. 60
Cond. A	3.ª	1. 3 — 13. »	1. 3 — 12. 5	11. 45
	4.ª	1. 5 — 13. 1	1. 5 — 12. 8	11. 45
	5.ª	2. » — 13. 6	2. » — 13. 2	11. 40
	6.ª	3. 1 — 14. 4	3. 1 — 14. »	11. 10
	7.ª	4. 7 — 15. 7	4. 7 — 15. 2	10. 75

Si vede che ad eccezione delle due ultime esperienze, in cui la posizione di riposo è troppo lontana dalle altre, le deviazioni sono prossimamente costanti.

16. Ciò premesso, vengo ora alla graduazione dell'elettrometro. Il principio del metodo che ho tenuto per farla si fonda sulla legge nota della distribuzione del potenziale elettrostatico nel circuito di una corrente permanente; ed è in breve il seguente.

Siano p e q due punti di un filo omogeneo e di sezione uniforme appartenente al circuito chiuso di una pila costante; e suppongasi p fisso e in comunicazione colla terra, e q preso a distanza variabile l da p e comunicante col piatto A del condensatore, di cui l'altro piatto è riunito alla terra. Il valore del potenziale in q

ed A sarà proporzionale alla lunghezza l, cui perciò per una determinata capacità del condensatore sarà pur proporzionale la carica raccolta sul piatto A, la quale, tolte le comunicazioni di q con A e sollevando A, farà deviare l'elettrometro. Per diverse lunghezze l prese sul filo si otterranno diverse deviazioni; e costruendo una tavola contenente in una colonna i numeri x letti sulla scala per le deviazioni impulsive nelle singole esperienze, ed a fianco in un'altra colonna le corrispondenti lunghezze l misurate, che sono proporzionali ai potenziali ed alle cariche cui son dovute le deviazioni x, si avrà fatta la graduazione. Questo metodo è comodo e capace di molta esattezza. Supponendo costante la pila e la capacità del condensatore, esso riduce la graduazione a misure di lunghezza, dove la precisione è relativamente facile.

In tuttte le varie serie di esperienze che io feci a questo proposito mi son servito di un filo di rame di 2 mm. di diametro, lungo 40 m. disteso in 4 giri distaccati sopra una specie di gran telaio rettangolare formato con quattro regoli di ebanite impiantati nella parete della stanza. Io ho scelto questo filo, che chiamerò d'ora innanzi filo di derivazione, così grosso, per avere maggiori lunghezze corrispondenti a dati potenziali, e render quindi minore l'influenza degli errori che potessero avvenire nella misura di quelle; e anche perchè così si ha miglior garanzia della sua omogeneità. Le due estremità terminavano in due vaschette isolate di mercurio, a cui facevano capo i fili provenienti dai poli della pila. Due pinzette a bocca molto stretta e munita di scanalatura trasversale per afferrar bene il filo senza schiacciarlo, servivano mediante due fili isolati a cui erano unite a far comunicare i due punti del filo rispettivamente colla terra e col condensatore, con tal disposizione che permetteva di scambiare comodamente le comunicazioni, con che si cambiava il segno del potenziale e della carica del condensatore.

Io mi son servito per queste esperienze sia del solo condensatore A, sia di ambedue i condensatori riuniti nel modo che ho già detto. Il piatto B nel primo caso, o i piatti B e B' nel secondo, erano collegati permanentemente colla terra.

Le comunicazioni colla terra in queste e in tutte le altre esperienze successive si stabilivano mediante un grosso filo di rame (filo di terra) disteso lungo la parete della stanza e saldato pei capi ai tubi di adduzione del gas, e munito di morsette metalliche scorrevoli per fissarvi i fili provenienti dalle varie parti dell'apparecchio.

La pila era costituita di uno o più elementi alla Bunsen. Si provvedeva alla costanza dell'intensità della corrente nel modo seguente. Due punti fissi presi sul filo di derivazione si univano alle estremità del filo di una bussola a specchio di Weber, che veniva così percorsa da una corrente derivata d'intensità proporzionale a quella della corrente principale, e serviva ad indicare le variazioni di questa. Un filo di rame di lunghezza variabile faceva parte del circuito della pila; e ad ogni diminuzione osservata nell'intensità della corrente se ne toglieva tanto che bastasse a riportarla al grado di prima. La pila si teneva chiusa solo il tempo necessario per le esperienze.

Ecco la serie delle operazioni relative a ciascuna determinazione.

1) Sul filo di derivazione, nel quale erano state preventivamente segnate con sottili tratti d'inchiostro le divisioni di metro in metro, tenendo una delle due pinzette suindicate sempre fissa nel punto p corrispondente alla 1ª divisione, si aggiustava l'altra pinzetta in un punto q corrispondente ad un'altra divisione distante dalla prima di quel numero l di metri che si voleva.

2) Si chiudeva la pila, e si osservava nella bussola l'intensità della corrente, riportandola al bisogno nel modo che ho detto al valore costante che doveva avere.

3) Riunito p colla terra ed osservata la posizione di riposo dell'ago, si faceva comunicare un istante il punto q col piatto A, o coi piatti A ed A' riuniti, aprendo subito dopo la pila; e poi operando al modo che sappiamo, si osservava l'effetto della carica nell'elettrometro.

4) Rimesso tutto al posto, e scaricato e tornato in riposo l'elettrometro, si richiudeva la pila, e si ripeteva l'ultima osservazione a comunicazioni invertite, cioè facendo comunicare q colla terra e p col condensatore.

La media x delle due deviazioni, la cui differenza proviene dal diverso segno delle cariche, come si è discorso più in alto, si scrive accanto al numero l che esprime la lunghezza del filo di derivazione compresa fra i punti p e q.

Lo stesso processo si ripete per ogni altra distanza. Tutte queste operazioni io poteva farle comodamente da me solo, e in poco tempo. Dopo ciascuna deviazione dell'elettrometro, io soleva far riposare l'apparecchio almeno per 5 minuti, tenendo per tutto questo tempo l'elettrometro ed i piatti in comunicazione col suolo.

17 Ecco i risultati numerici relativi ad una serie di tali determinazioni. Questa serie è fatta col solo condensatore A, e con tre elementi Bunsen.

PROSPETTO 1.

Graduazione dell'apparecchio. — un solo condens. A

N.° d'ordine	I intervallo l	II El. +	III El. —	IV Media delle deviazioni x
1	4m	0. 90 — 1. 25	0. 90 — 1. 25	0. 35
2	5	1. 00 — 1. 58	0. 90 — 1. 55	0. 56
3	6	1. 05 — 1. 95	1. 50 — 1. 90	0. 87
4	7	1. 10 — 2. 35	1. 10 — 2. 30	1. 22
5	8	1. 00 — 2, 75	1. 00 — 2. 65	1. 70
6	9	1. 00 — 3. 30	1. 00 — 3. 20	2. 25
7	10	1. 00 — 3. 90	1. 00 — 3. 75	2. 82
8	11	1. 00 — 4. 60	1. 00 — 4. 40	3. 50
9	12	1. 00 — 5. 25	1. 00 — 5. 10	4. 17
10	13	1. 00 — 6. 00	1. 00 — 5. 70	4. 85
11	14	1. 00 — 6. 75	1. 00 — 6. 50	5. 62
12	15	1. 00 — 7. 60	1. 00 — 7. 25	6. 42
13	16	1. 00 — 8. 40	1. 00 — 8. 10	7. 25
14	17	1. 00 — 9. 30	1. 00 — 9. 00	8. 15
15	18	1. 00 — 10. 40	1. 10 — 10. 00	9. 10
16	19	1. 20 — 11. 40	1. 10 — 11. 00	10. 05
17	20	1. 10 — 12. 30	1. 00 — 11. 90	11. 05
18	21	1. 00 — 13. 15	1. 00 — 12. 85	12. 00
19	22	1. 00 — 14. 20	1. 00 — 13. 80	13. 00
20	23	1. 10 — 15. 20	1. 10 — 14. 90	13. 95
21	24	1. 00 — 16. 20	1. 00 — 15. 85	15. 02
22	25	0. 90 — 17. 10	0. 80 — 16. 80	16. 00
23	30	0. 80 — 22. 00	0. 80 — 21. 70	21. 05
24	35	0. 85 — 26. 95	0. 90 — 26. 65	25. 92
	Coppia Daniell	0. 90 — 4. 50	0. 90 — 4. 25	3. 47

In questi numeri non si può garantire l'esattezza della seconda cifra decimale, che risulta da una valutazione approssimativa ad occhio.

Coi dati del prospetto è stata costrutta la curva I (T.II.) che rappresenta graficamente la graduazione dell'elettrometro. I risultati delle singole esperienze sono rappresentati con punti. Le ascisse x sono i numeri dell'ultima colonna, cioè le deviazioni, le ordinate y sono i numeri l della colonna I proporzionali alle cariche.

Si vede che le ordinate crescono dapprima rapidissimamente, e mentre x va da 0 a 0.35, y va da 0 a 4.00. In questo intervallo per la piccolezza delle deviazioni le esperienze non potevano farsi con sicurezza. Col crescere di x la curva si accosta a poco a poco alla forma di una linea retta, e al di là di $x=10$ non ne differisce più sensibilmente. Questa retta è egualmente inclinata rispetto ai due assi e taglia l'asse delle y nel punto $y=9,00$, cioè ha per equazione

$$y=x+9$$

I punti corrispondenti alle esperienze 23 e 24 non sono contenuti nella figura, ma appartengono anch'essi sensibilmente alla retta medesima, la quale prolungata oltre i limiti della figura, rappresenta tutto il resto della graduazione.

L'ultima esperienza è fatta con una coppia Daniell aperta, ed ha per oggetto di stabilire un termine noto di confronto pei potenziali a cui sono proporzionali le cariche rappresentate dalle ordinate della curva. Alla deviazione 3.47 in essa ottenuta appartiene l'ordinata 11, cosicchè l'unità di lunghezza sulla figura, che per le ascisse è il grado della scala, corrisponde per le ordinate al potenziale $\frac{1}{11}$ D, indicando con D la forza elettromotrice di un elemento Daniell. Tal numero, che dipende essenzialmente dalla capacità del condensatore A, è rimasto prossimamente lo stesso in tutto il corso di questo studio; e del

resto fatta che sia una volta la graduazione, si può come si vede determinarlo di nuovo direttamente ogni volta che si vuole. Questa determinazione sarebbe però necessaria solo nel caso che si avesse a fare il confronto numerico di esperienze fatte in epoche diverse, in cui vi fosse da temere che la capacità del condensatore avesse subito qualche cambiamento; il che non è mai occorso nel seguito di questo studio. Onde io mi son servito sempre del valor precedente nelle riduzioni che ho fatto, le quali hanno avuto per oggetto solamente di dare un'idea approssimata della grandezza effettiva delle forze elettromotrici che son venuto misurando.

18 Il seguente prospetto contiene i risultati di un'altra serie di esperienze fatte, ad eccezione dell'ultima, coi due condensatori riuniti. Si aveva una sola coppia Bunsen.

PROSPETTO 11

Graduazione dell' apparecchio: — due condens. riuniti.

	N.° d'ordine	I intervallo l	II El. +	III El. —	IV Media α
Cond. A+A′	1	3m	1. 10 — 1. 60	1. 10 — 1. 55	0. 47
»	2	5	1. 20 — 2. 90	1. 20 — 2. 70	1. 60
»	3	7	1. 10 — 4. 60	1. 10 — 4. 40	3. 40
»	4	10	1. 10 — 8. 20	1. 10 — 7. 80	6. 90
»	5	13	1. 00 — 12. 50	1. 00 — 12. 20	11. 35
»	6	17	1. 20 — 18. 80	1. 20 — 18. 40	17. 40
»	7	20	1. 00 — 23. 05	1. 05 — 22. 75	21. 87
»	8	22	1. 00 — 26. 30	1. 00 — 25. 90	25. 10
»	9	25	1. 00 — 31. 00	1. 10 — 30. 60	29. 80
Cond. A	1	26	1. 00 — 4. 50	1. 00 — 4. 30	3. 40

Per poter confrontare i numeri di questa serie con quelli della precedente, si osservi che le deviazioni x dipendono propriamente dalle cariche raccolte in fine di ogni esperienza sul piatto A che è collegato coll'elettrometro. I numeri l della colonna I che rappresentano le lunghezze prese sul filo di derivazione, sono in tutte e due le serie proporzionali a quelle cariche, ma con rapporto diverso dall'una all'altra. Perciocchè in primo luogo per la mutata intensità della corrente è variata in un certo rapporto P la ragione degl'intervalli presi sul filo di derivazione ai potenziali che loro corrispondono. Questo numero P può calcolarsi coi dati dell'ultima esperienza cercando il rapporto $\frac{1}{P}$ dell'intervallo con cui questa è fatta a quello cui nella prima serie corrisponde un egual deviazione, e si trova $P = \frac{10,95}{26} = 0,42$.

In secondo luogo la ragione delle cariche ai potenziali che le producono è naturalmente diversa sperimentando con un solo condensatore e con due. Indicando con R il rapporto fra le cariche che si hanno nell'uno e nell'altro caso per un medesimo potenziale, o, ciò che è lo stesso, il rapporto inverso dei potenziali che producono la medesima carica, il numero R che chiamerò coefficiente di riduzione, servirà a ridurre le esperienze fatte coi due modi ad una stessa misura. Questo coefficiente, finchè non si mutino le condizioni dell'apparecchio, deve rimaner costante; ed è dato qui senz'altro dal rapporto $\frac{26}{7} = 3,714$ degl'intervalli della 3.ª esperienza e dell'ultima, nelle quali coi due modi di sperimentare si è avuta una stessa deviazione.

Il prodotto P R esprime il rapporto costante che deve esistere fra gl'intervalli che nell'una e nell'altra serie corrispondono alla medesima deviazione. Di modo

che per confrontare le due serie di esperienze si hanno da calcolare per le singole deviazioni i valori di questo rapporto, e vedere se sono effettivamente costanti ed uguali a P R.

I risultati del confronto sono esposti nel quadro seguente. Nella colonna I si trovano le deviazioni x del prospetto II, nella II gl'intervalli a cui sono dovute, nella III gl' intervalli che corrispondono alle stesse deviazioni nella prima serie, i quali si rilevano dalla curva I, nella IV i rapporti dei numeri della III a quelli della II. Per maggiore evidenza si sono scritti in una quinta colonna le differenze dei numeri della II moltiplicati per il valor medio c di quei rapporti, ai numeri della III con cui dovrebbero coincidere.

N.° d'ordine	I x	II l	III y	IV y/l	V $cl-y$
1	0. 47	3.m	4. 65	1. 550	0. 01
2	1. 60	5	7. 80	1. 560	— 0. 03
3	3. 40	7	10. 90	1. 557	— 0. 02
4	6. 90	10	15. 58	1. 558	— 0. 04
5	11. 35	13	20. 35	1. 565	— 0. 15
6	17. 40	17	26. 40	1. 553	0. 02
7	21. 87	20	30. 87	1. 544	0. 21
8	25. 10	22	34. 10	1. 550	0. 09
9	29. 80	25	38. 80	1. 552	0. 05
				13. 989	

$$c=\frac{13.989}{9}=1,554\ ;\ PR=0.42\times3.71=1,558$$

Le indicazioni del quadro dimostrano sufficientemente la concordanza delle due serie d'esperienze, la

la quale è prova a un tempo dell'esattezza della graduazione, e dell'eguaglianza dei risultati che si hanno sperimentando con uno o con due condensatori. La medesima graduazione e curva vale adunque egualmente nei due casi. Solamente i valori effettivi dei potenziali che nell' uno e nell' altro caso corrispondono ad una medesima deviazione, che è quanto dire ad una medesima carica, differiscono per un fattor costante, che è il coefficiente R di riduzione, il quale serve a ridurre ad una stessa misura le esperienze fatte coi due modi.

Questo coefficiente il cui valore è qui 3,71, variò di poi per aver cambiato le punte di ebanite nel condensatore A', e divenne uguale a 4., valore che ha poi conservato prossimamente in tutto il corso di questo lavoro. Del resto io l'ho determinato di nuovo direttamente, quante volte ho dovuto fare il confronto numerico dei risultati ottenuti coi due modi. Fuori di questo caso ho ritenuto il valore 4, il quale mi ha servito per la riduzione approssimata delle misure in unità della forza elettromotrice D di una coppia Daniell, come è detto nel numero precedente. La forza elettromotrice corrispondente all'unità di carica (unità di misura delle y sulla curva I), che col condensatore A è uguale prossimamente a $\frac{D}{11} = 0,0909\,D$, con due condensatori è $\frac{D}{11.R}$, ossia così $\frac{D}{44} = 0,0227\,D$. Ponendo D=100, si passerà dalle ordinate y alle forze elettromotrici espresse in centesimi di D moltiplicando le y per il numero $\frac{100}{11}=9,09$ nelle esperienze fatte col condensatore A, e per il numero $\frac{100}{44} = 2,27$ in quelle fatte con ambedue i condensatori.

L'estensione delle misure, vale a dire il rapporto dei potenziali che con uno stesso modo di sperimentare corrispondono alla deviazione massima (x=35,0) e minima

($x=0,5$), che comporta l'uso dell'elettrometro, è prossimamente uguale a 9, come si vede dalla graduazione, ed usando i due modi insieme essa viene accresciuta nella proporzione di 1 a 4. La deviazione massima è qui determinata dalla lunghezza della scala, e la minima è fissata a mezzo grado, perchè con deviazioni più piccole le misure divengono troppo incerte.

Il potenziale che produce con due condensatori la deviazione di mezzo grado, alla quale appartiene sulla curva l'ordinata 4,8, è in centesimi di $D \times 4,8 \times 2,27 = 10,9$. Di modo che l'apparecchio può misurare potenziali la cui piccolezza arriva fin presso a $\frac{1}{10}$ D, e il campo delle misure si estende prossimamente da $\frac{1}{10}$ D a 3, 6 D.

19. Come si vede l'apparecchio è già così discretamente sensibile, ma si può, senza mutar nulla in esso, estendere le misure fino a potenziali più piccoli col metodo che ora esporrò.

Questo si fonda sulla considerazione della proprietà speciale già notata della funzione o curva che rappresenta la graduazione dell'elettrometro, che cioè le ordinate crescono da principio molto più rapidamente che in seguito. Il coefficiente differenziale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, che per $x=10$ ha un valore costante ed uguale ad 1, cresce col diminuire di x, e tanto più rapidamente quanto più x è piccolo. Questa proprietà fa sì che una carica dovuta ad un piccolo potenziale, la quale di per sè non dà che una deviazione insensibile o piccolissima, può aggiunta o tolta ad un'altra carica più grande produrre una differenza apprezzabile di deviazione, la quale serva a valutarla.

Sia p. es. la carica rappresentata dall'ordinata 1, cui risponderebbe direttamente una deviazione affatto insensibile; e si abbia sul piatto A una carica comunque

ottenuta, rappresentata dall'ordinata 20, la quale produrrebbe da sè una deviazione di 11 gradi: alla somma 21 delle due cariche corrisponde una deviazione di 12 gradi, con una differenza di 1 grado rispetto alla precedente.

Dirò ora in qual modo ho potuto valermi praticamente di questa proprietà. Io metteva il piatto inferiore B del condensatore più piccolo in comunicazione col polo di una pila di due elementi di Daniell, di cui l'altro polo comunicava colla terra. Facendo dopo ciò con uno o con due condensatori le solite operazioni delle precedenti esperienze, se non vi è alcuna forza elettromotrice nel sistema dei conduttori che collegano i piatti collettori colla terra, si ottiene in fine sul piatto A una carica costante, che è dovuta all'influenza dell'elettricità raccolta sul piatto inferiore B, e che sollevando al solito il piatto A dà una determinata deviazione X. Se poi vi è una forza elettromotrice, la carica che essa produrrebbe, ove il piatto B fosse come d'ordinario in comunicazione colla terra, si aggiunge in più o in meno secondo il segno all'anzidetta carica d'induzione, e si ha così una deviazione maggiore o minore della precedente $x_1 > X$, o $x_2 < X$. Indicando con y_1, y_2, Y rispettivamente le ordinate corrispondenti prese sulla curva, le quantità

$$y_1 - Y \,,\; Y - y_2 \,,\; \frac{y_1 - y_2}{2}$$

che debbono essere uguali fra loro, e che indicherò con Δy, rappresentano la carica che è dovuta a quella data forza elettromotrice e che ne dà la misura. Per deviazioni x maggiori di 10 gradi le y corrispondenti si hanno dalla relazione $y = x + 19$, onde le Δy sono in questo caso uguali alle differenze $\Delta x \left(x_1 - X, X - x_2, \frac{x_1 - x_2}{2} \right)$ date dall'osservazione; ma in ogni caso si deducono da queste per mezzo della curva.

I risultati dell'esperienza hanno pienamente corrisposto a queste previsioni. Mi limito ad indicare una delle varie serie di misure fatte a questo proposito.

Si aveva il solito filo di derivazione percorso dalla corrente di una coppia Bunsen e si operava coi due condensatori riuniti. Una prima esperienza fu fatta col modo ordinario, cioè tenendo il piatto B in comunicazione colla terra, allo scopo di determinare così direttamente la ragione con cui variava il potenziale nel filo di derivazione misurando il rapporto $\frac{y}{l}=k$ dell'ordinata corrispondente sulla curva alla deviazione ottenuta, con l'intervallo l di filo col quale si ebbe quella deviazione.

Si ebbero così i seguenti numeri. Scriverò per brevità qui e in seguito semplicemente le deviazioni effettive, cioè le differenze dei numeri letti in ciascuna osservazione con quelli che indicano la rispettiva posizione di riposo.

	I intervallo l	II El. +	III El. —	IV Media x	V Ordinata corrisp. y
1	25	28. 90	28. 30	28. 60	37. 60
2	»	28. 80	28. 30	28. 53	37. 55

$$\text{valore medio di } y\ 37{,}57 ; k = \frac{37{,}57}{25} = 1{,}503$$

Si pose quindi il piatto B in comunicazione col polo negativo della anzidetta pila di due coppie Daniell, e così si procedette alle solite operazioni. Il seguente prospetto contiene l'indicazione ed il confronto numerico dei risultati. La deviazione X osservata quando il potenziale sui piatti collettori era uguale allo zero, il che si otteneva

tenendo aperto il circuito di cui faceva parte il filo di derivazione, si trovò sempre costante ed uguale a 13 gradi.

PROSPETTO III

Graduaz. dell'app. — due cond. riuniti, misura differenziale

X=13.00 ; Y=22.00 ; k=1.50

N.° d'ordine	I Interv. l	II x_1	III x_2	IV y_1	V y_2	VI y_1-Y	VII Y-y_2	VIII $\frac{y_1-y_2}{2}$	IX kl
1	$^1/_3$^m	13. 50	12. 50	22. 50	21. 50	0. 50	0. 50	0. 50	0. 50
2	$^2/_3$	14. 05	12. 10	23. 05	21. 10	1. 05	0. 90	0. 97	1. 00
3	1	14. 45	11. 50	23. 45	20. 50	1. 45	1. 50	1. 47	1. 50
4	2	16. 00	10. 05	25. 00	19. 05	3. 00	2. 95	2. 97	3. 00
5	3	17. 55	8. 60	26. 55	17. 50	4. 55	4. 50	4. 52	4. 50

I numeri delle colonne VI, VII, VIII, che sono prossimamente uguali fra loro, crescono proporzionalmente agl' intervalli l corrispondenti, e il rapporto non differisce dal numero k precedentemente determinato, come apparisce dal confronto coi numeri dell'ultima colonna. Ciò dimostra l'applicabilità di questo metodo, col quale si hanno misure esatte al pari di quelle ottenute col modo ordinario e con quelle direttamente comparabili.

Indicherò d'ora innanzi per brevità questo metodo di misura col nome di *differenziale* per distinguerlo dall'altro modo ordinario o *diretto*.

L'aumento di sensibilità che per esso si ottiene è considerevole. Le variazioni Δx sulla curva I essendo per $x > 10$ uguali alle corrispondenti Δy, ove si fissi anche qui per limite inferiore di Δx il mezzo grado, si arriva nelle misure fino alle cariche corrispondenti a $\Delta y = \frac{1}{2}$, che sono quasi 10 volte più piccole della carica

($y=4,8$) che corrisponde alla deviazione di mezzo grado col modo ordinario. Di guisa che con due condensatori si va così fin quasi al centesimo della forza elettromotrice di una coppia Daniell.

Vi ha di più che per la lentezza del movimento dell'ago dell'elettrometro, il quale impiega circa 15 secondi o fare una deviazione, si apprezzano più facilmente le piccole differenze di due deviazioni un po' grandi, che non le piccole deviazioni, nelle quali l'ago par quasi immobile; cosicchè si possono apprezzare anche le Δx inferiori al mezzo grado senza grande incertezza. La sensibilità viene inoltre raddoppiata sperimentando, quando si può, due volte di seguito col medesimo potenziale cambiato di segno, ed osservando la differenza $x_1—x_2$ delle due deviazioni, la quale è doppia della differenza Δx che corrisponde a quel potenziale.

Il metodo differenziale ha anche il vantaggio di far conoscere il segno dei potenziali che si misurano, che nel modo ordinario non è indicato direttamente dal mio apparecchio, ed ha poi il pregio più importante di essere esente dall'influenza di alcune cause di errore che potessero esservi nel condensatore, bastando per esso che la capacità ne sia invariabile, e che funzioni allo stesso modo nelle due esperienze che occorrono per ogni misura. Infatti le cause permanenti, come l'elettrizzamento permanente dei coibenti, la diversità delle superficie metalliche opposte, l'esistenza di qualche forza elettromotrice estranea, influendo egualmente sulle due deviazioni, non hanno effetto sulla loro differenza.

Ciò fa sì che col metodo differenziale si possano avere buone misure anche adoperando condensatori che altrimenti darebbero risultati inesatti. Così p. es. io sono riuscito ad ottenere numeri discretamente esatti con un condensatore a piatti d'ottone verniciati messo al posto del condensatore A', del quale aveva anche le dimensioni.

Per la grande capacità di un tal condensatore la sensibilità dell'apparecchio era allora estrema, ed il coefficiente R di riduzione era prossimamente uguale a 18. In tal modo io son giunto a misurare le differenze di potenziali in due punti del mio filo di derivazione che chiudeva una coppia Bunsen, fino alla distanza di 5 cm. Però nelle applicazioni a cui si riferisce il presente lavoro non mi sono servito d'altri condensatori che di quelli che ho prima descritti.

20. Quello che ho detto a proposito del metodo differenziale rende ragione di un fatto che ho già riferito in principio, e che allora poteva sembrare non ben chiaro, voglio dire di questo che mentre col mio apparecchio sperimentando senza forza elettromotrice non si ha mai alcun segno di deviazione, pure accade di osservare differenze apprezzabili nelle deviazioni che si hanno per una medesima forza elettromotrice secondo il segno con cui è presa.

La spiegazione si ha subito in ciò che una piccola carica, dovuta ad una causa risiedente nell' apparecchio, sebbene incapace di dare per sè alcuna deviazione sensibile, può, come si è visto, aggiunta in più o in meno ad altra carica, produrre un effetto notabile.

Si vede altresì come si possa valutare quella carica che chiamerò *carica interna*, e correggere l' errore che porta nelle misure, anche senza essere obbligati di ripetere ciascuna misura due volte, come io ho fatto nelle esperienze precedenti e in molte di quelle che seguono. Essa deve infatti rimanere costante finchè non si mutano le condizioni dei condensatori, come risulta effettivamente dai numeri già dati; e deve essere uguale alla metà della differenza delle cariche date da una medesima forza elettromotrice presa con un segno e coll'altro. Indicando con x_1, x_2 le deviazioni così ottenute, con y_1, y_2 le ordinate corrispondenti della curva I, la carica interna sarà rappresentata da $\delta = \frac{y_1 - y_2}{2}$; e per correggere l'errore che ne

deriva nelle misure, basterà che alle y corrispondenti alle deviazioni osservate si aggiunga o tolga secondo il segno la quantità δ. La determinazione di questa va fatta di nuovo per ogni serie di esperienze in cui se ne voglia far uso, ed è utile ripeterla più volte nel corso di una stessa serie per accertarsi della costanza. Nelle esperienze precedenti δ è prossimamente uguale a 0,15 con un solo condensatore e a 0 , 20 con ambedue; e questi valori non son variati che di poco nel corso del mio lavoro.

21. Per non ingombrare troppo di numeri queste pagine, io non ho riferite che poche delle numerose esperienze che ho fatte studiando e graduando l'apparecchio. Credo tuttavia che le indicazioni di questo capitolo bastino a darne un'idea sufficiente al lettore. Le riassumerò ora in poche parole.

La curva I rappresenta la relazione fra le cariche raccolte in fine di ogni esperienza sul piatto A (ordinate y) e le deviazioni che producono nell'elettrometro (ascisse x).

Per valori di y minori di 4,8 le x sono così piccole (minori di mezzo grado) che non possono esser date con sicurezza dall'osservazione. Di poi le x crescono più rapidamente con le y, e gli aumenti delle une e delle altre s'accostano a poco a poco alla proporzionalità (e con le unità di misura con cui è costrutta la curva all'eguaglianza), e la raggiungono sensibilmente verso il punto ($x = 10$, $y = 19$), oltre il quale la curva è una linea retta.

Per misurare cariche minori di 4,8 si usa il metodo differenziale, che consiste nell'osservare l'aumento e la diminuzione Δx che quelle cariche, aggiunte in più o in meno ad una carica fissa, producono nella deviazione X che a questa corrisponde. Le differenze $\pm \Delta y$ fra le ordinate appartenenti alle ascisse $X \pm \Delta x$ ed X (differenze che per ascisse maggiori di 10 sono uguali alle Δx),

rappresentano quelle date cariche. Così si arriva colle misure fino alle cariche uguali ad $\frac{1}{2}$ ed anche più piccole.

L'unità di carica, ossia l'unità di misura per le ordinate y, corrisponde prossimamente con un condensatore ad $\frac{1}{11}$ della forza elettromotrice di un elemento Daniell, e coi due condensatori ad $\frac{1}{44}$.

IV

Verificazione delle leggi dell'induzione per moto relativo di una spirale rispetto ad un circuito voltaico o ad una calamita.

22 La prima applicazione ch'io ho fatto dell'apparecchio e del modo di misura precedentemente descritti (senza contare le determinazioni della forza elettromotrice di alcune coppie elettriche ([1]), le quali furono fatte così per prova e senza quelle cure nella preparazione delle coppie che sono indispensabili perchè tali misure abbiano qualche valore, e non meritano perciò di essere riferite); è stata la verificazione di alcune fra le note leggi dell'induzione per moto relativo di un circuito in presenza di una calamita o di un altro circuito percorso da corrente.

([1]) Per es. dai numeri che ho riferiti risulta già la misura della forza elettromotrice B di una coppia Bunsen in confronto di quella di una Daniell (D=100). Si è visto infatti come con una coppia Bunsen e col condensatore A si ebbe una deviazione media $x = 11,6$ (pag. 25) a cui corrisponde sulla curva I l'ordinata 20, 6, e quindi una differenza di potenziale $B = 20,6 . \frac{100}{11} = 187$.

Secondo l'odierna teoria dell'induzione, quale risulta dai lavori di Lenz, Neumann, Felici ed altri, indicando con P il potenziale elettromagnetico o elettrodinamico della calamita o del circuito chiuso inducente sopra il circuito chiuso indotto supposto percorso dall'unità di corrente ([1]), la forza elettromotrice e indotta in quest'ultimo in un dato istante t è

$$E = \epsilon \frac{dP}{dt}$$

essendo ϵ la costante d'induzione, il cui valore dipende dalle unità di misura, e che si può supporre uguale ad 1.

Tale forza elettromotrice, supposta permanente, produrrebbe a circuito interrotto, dopo un brevissimo periodo variabile una differenza $\Delta = E$ di potenziale elettrostatico ai capi del filo che potrebbe misurarsi coll'elettrometro; ed a circuito non interrotto, similmente dopo un periodo variabile, una corrente d'intensità $I = \frac{E}{R}$ (essendo R la resistenza del circuito) da misurarsi con un galvanometro. Però le forze elettromotrici d'induzione sono sempre variabili col tempo. Nei casi d'induzione per apertura o chiusura del circuito inducente, il potenziale elettrodinamico passa quasi istantaneamente dal valore determinato P_0, che ha a corrente chiusa al valore zero e viceversa; ed è allora impossibile tener dietro coll'esperienza alle variazioni della forza elettromotrice E, astrazion fatta da quei casi in cui delle cause ritardatrici, come l'estracorrente che succede alla chiusura del circuito inducente, intervengano a prolungare la

([1]) Quando si tratti di circuiti chiusi l'esistenza ed il significato fisico di P sono, come è noto, ben chiari e al di fuori delle difficoltà e controversie che si agitano intorno al potenziale elettrodinamico elementare.

durata del fenomeno. Solo si può misurare col galvanometro la corrente totale che percorre il circuito indotto, la quale si trova essere uguale a $\frac{P_0}{R}$, onde si deduce che la somma delle forze elettromotrici indotte è uguale a P_0. Nell'induzione per moto relativo invece le variazioni di P e di E sono comparativamente assai lente, e si può studiarne sperimentalmente l'andamento. Trascurando, come qui può farsi generalmente, il piccolo tempo che l'elettricità mette a stabilirsi in equilibrio statico o dinamico corrispondentemente alle forze che sono in azione, la differenza Δ di potenziale elettrostatico che si manifesta ai capi del circuito indotto aperto, o l'intensità I della corrente a circuito chiuso, misurate in un dato istante darebbero la misura del valore che ha in quel medesimo istante la forza elettromotrice E d'induzione.

Il galvanometro di sua natura non misura che la quantità Q di elettricità

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} I dt = \frac{1}{r} \int_{t_0}^{t_1} E dt$$

che passa in un dato tempo attraverso il filo, onde non dà direttamente il valore istantaneo dell'intensità variabile I e della corrispondente forza elettromotrice E, a meno che non si prenda un tempo $(t_1 - t_0)$ tale che durante il medesimo si possa riguardare I come costante, il che non è sempre possibile in pratica. In generale pertanto col galvanometro, cioè a circuito indotto chiuso, non si studiano le forze elettromotrici direttamente; ma se ne studia la funzione integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} E dt.$$

La quale poi teoria ed esperienza insieme han dimostrato essere uguale alla differenza

$$P_1 - P_0$$

dei valori del potenziale P nei due stati corrispondenti ai tempi t_0 e t_1.

A circuito aperto invece si può coll'elettrometro misurare in ogni istante il valore della forza variabile E, per mezzo della differenza Δ anzidetta. Per questo si tengono i due capi del filo riuniti ai due piatti di un condensatore; e interrompendo le comunicazioni nell'istante che si vuole, si misura la carica raccolta nel piatto collettore; la quale, supponendo trascurabile come ho detto il tempo che l'elettricità impiega a mettersi in equilibrio, è proporzionale il valor di Δ e di E al momento dell'interruzione.

Quest' ultimo è il metodo ch' io ho seguito. Il caso che ho trattato è quello di una spirale fatta di n giri di filo riuniti in un anello circolare, il quale si muove in presenza del sistema inducente, in modo che la sua posizione in ogni istante possa esprimersi in funzione della lunghezza s del cammino percorso da uno dei suoi punti, p. es. dal centro. I giri di cui è composto l'anello sono così ravvicinati che si possono riguardare come uguali di grandezza e di posizione.

Indicando con p il potenziale del sistema inducente sopra un giro del filo suddetto, si ha

$$P = np\,; \frac{dP}{dt} = n\frac{dp}{dt} = n\frac{dp}{dt}\frac{ds}{dt},$$

essendo $\frac{ds}{dt}$ la velocità con cui si muove il centro dell'anello, che indicherò con v; onde

$$E = \frac{dP}{dt} = nv\frac{dp}{ds}$$

Nel caso d'induzione elettrodinamica p è proporzionale all'intensità i della corrente inducente, e si ha

$$p = ip'$$

indicando con p' il potenziale relativo all'unità di corrente inducente; onde:

$$E = nvi\frac{dp'}{ds}.$$

Da queste formole sono espresse le tre leggi note che io ho preso a verificare con misure elettrostatiche, cioè che la forza elettromotrice indotta, a parità delle altre circostanze è proporzionale:

1) al numero n di giri della spirale indotta,

2) alla velocità v del moto a cui l'induzione è dovuta,

3) all' intensità della corrente inducente, ove si tratti d'induzione elettrodinamica.

23. L'apparecchio di cui mi son servito per queste esperienze, oltre l'elettrometro ed i condensatori già descritti, è rappresentato nelle sue parti principali dalla fig. III, Tav. I. Esso consiste in un pendolo il quale cadendo porta seco nel suo moto la spirale indotta, ed è unito fissamente ad un interruttore destinato a togliere in un dato istante la comunicazione della spirale indotta col condensatore, e nello stesso tempo a determinare per mezzo di una disposizione speciale la velocità del movimento.

L'interruttore fu divisato e fatto costruire dal Prof. Felici, che me ne concesse gentilmente l' uso; ed è quel medesimo di cui egli ha pubblicato testè un'accurata descrizione illustrata coll'esempio di alcune serie di esperienze fatte con quello (1). La quale pertanto mi dispensa dal

(1) Nuovo Cimento Vol. XII, p. 115; Settembre 1874.

doverlo descrivere io minutamente; onde mi limito ad un semplice cenno.

Una sbarra di ottone *zz'* a guisa di giogo o bilanciere è imperniata nell'occhio di due forti staffe metalliche che stanno solidamente impiantate sopra una base di ferro fuso. Essa porta in ciascun braccio un corsoio da fissarsi con vite di pressione dove si vuole, il quale con un risalto urta e solleva al girare del bilancio *zz'* una piccola leva *x* col cui mezzo si produce l'interruzione. Questa leva, che è di ebanite, porta un bottone metallico foggiato inferiormente a callotta che, quando la leva è abbassata, si appoggia premuto da una molla sulla superficie piana di un altro bottone metallico impiantato in un braccio sottoposto di ebanite. I due bottoni sono muniti di serrafili. Questi pezzi sono portati da una specie di carretto che può muoversi su e giù lungo una colonna metallica verticale guidato per mezzo di una fenditura, e che si fissa all'altezza voluta con vite a pressione. Per ciascun braccio del bilanciere *zz'* si ha uno di questi sistemi, e se ne possono avere anche due con due colonne disposte di fronte da una parte e dall' altra del braccio. Così regolando la posizione dei corsoi e l'altezza delle leve, si possono produrre al girare della sbarra *zz'* fino a quattro interruzioni in dati punti e con dati intervalli. Nella figura non si veggono che due colonne, poichè non mi sono servito che di queste in tutte le esperienze che ho da riferire, e per quelle poi di cui ora sto trattando non ne occorre che una sola.

La velocità con cui si fa girare il bilanciere *zz'* e l'intervallo di tempo che corre fra le varie interruzioni che si producono, si osservano direttamente nel modo che ora dirò. Una ruota o cilindro C di ottone di 14 Cent. di diametro e 3 Cent. di altezza è fissata solidamente allo stesso asse su cui è imperniato il bilanciere *zz'*. Accanto al cilindro sta da una parte una sirena di Froment (che

non è disegnata sulla figura) la cui ancora oscillante porta in cima una linguetta di ottone sottile ed appuntata. La sirena è disposta in modo che si può sollevare od abbassare, con che l'ancora oscillante si allontana dalla superficie del cilindro, o le si avvicina fino a sfiorarla con la punta della linguetta, la quale allora all' oscillare dell' ancora scorre innanzi e indietro sopra di essa secondo una sua generatrice. Quando si fa girare il bilanciere insieme col cilindro, la punta vibrante traccia sulla superficie una curva sinuosa, che si rende visibile affumicando quella leggermente.

La disposizione della sirena permette ancora di spostare questa parallelamente all'asse del cilindro, col qual movimento, se la sirena è abbassata, la punta in riposo traccia sulla superficie annerita una generatrice. Tali linee così tracciate forniscono un mezzo comodo per determinare la posizione del cilindro e del bilanciere. Oltre a ciò il detto movimento serve a portare la punta che traccia le curve sulla superficie del cilindro, sopra parti sempre nuove di quella superficie, in modo da avere più curve di seguito descritte l'una accanto all'altra.

Per determinare con questo sistema l'intervallo di tempo che in una data esperienza corre fra due interruzioni, si tracciano nel modo testè indicato, prima o dopo l'esperienza, le generatrici corrispondenti all'una e all'altra interruzione, cioè alle posizioni in cui il bilanciere zz' incontra l'una e l'altra leva, e poi si conta il numero l di oscillazioni che sulla curva tracciata dalla punta della sirena sono contenute nel tratto compreso fra quelle due generatrici. Se n è il numero delle vibrazioni che fa al secondo l'ancora della sirena, il quale si desume dalla nota che essa rende, l'intervallo cercato sarà di $\frac{l}{n}$ secondi. Con ugual facilità si determina la velocità del movimento del cilindro e del bilanciere, la quale è proporzionale alla lunghezza che occupano le vibrazioni sulla curva.

In tutte le mie esperienze la sirena era messa in azione da una pila di 3 elementi Bunsen, e rendeva una nota sensibilmente costante che era il do_3 di 512 vibrazioni semplici. Una vaschetta di mercurio inserita nel circuito serviva a farla suonare o tacere a volontà immergendo o sollevando semplicemente un filo. Nel contare le vibrazioni sulla curva, si valutavano le frazioni ad occhio o con l'aiuto di una lente e di un piccolo regolo graduato. Così io poteva apprezzare fino ai decimi di oscillazione.

Il limite della piccolezza degl'intervalli di tempo che col descritto istrumento si possono avere fra le interruzioni e valutare senza troppa incertezza, dipende in molta parte dell'abilità e dalla pratica dello sperimentatore; ma credo che possa stabilirsi prossimamente fra $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{10}$ di vibrazione, cioè verso $\frac{1}{2000}$ di secondo.

24. Al descritto interruttore io aggiunsi un pendolo nel modo che è indicato dalla figura. L'asta è fatta con una striscia di lamina d'ottone, alla quale sono saldate ad angolo retto lungo la linea di mezzo di una faccia, al di sopra e al di sotto del centro di sospensione due striscie più corte che servono di rinforzo, ed impediscono le oscillazioni trasversali dell'asta. L'asse di sospensione del pendolo coincide con l'asse del bilanciere zz e del cilindro C a cui è fissato solidamente; di guisa che asta, bilanciere e cilindro formano un solo sistema rigido che oscilla tutto insieme intorno allo stesso asse.

L'asta ha nella sua parte inferiore tre fori E_1, E_2, E_3, due dei quali si succedono secondo la sua lunghezza verticale alla distanza di m. 0,40 e m. 0,50 dall'asse di sospensione, ed il terzo è posto m. 0,07 più in basso in una ripiegatura orizzontale di 3 cm. di lunghezza con cui essa termina inferiormente. I due fori E_2, E_3, servono a fissare all'asta con viti di pressione il rocchetto della spirale indotta in posizione verticale od orizzontale, e l'altro E_1 serve

all'occorrenza a fissarvi dei pesi per modificare e regolare la velocità del moto oscillatorio del sistema. Al medesimo ufficio è destinata la fenditura verticale che si vede nella parte superiore dell'asta, lungo la quale si può disporre un peso o corsoio a diverse altezze. Il movimento del sistema può essere abbandonato a sè lasciando cadere il pendolo da una data altezza, oppure si può regolarlo a mano infilando le dita fra i raggi della ruota C.

25. Ecco ora il piano delle esperienze. La spirale indotta ha uno de suoi capi in comunicazione col suolo, e l'altro capo comunica per mezzo di un filo isolato col pezzo metallico sottoposto al bottone della leva x, il quale mediante un filo pure isolato è riunito al condensatore. Portata dall'asta la spirale si muove in presenza del sistema inducente opportunamente disposto in vicinanza del pendolo, e la forza elettromotrice d'induzione che ne deriva dà luogo, finchè la leva x è abbassata, ad una carica nel condensatore con cui la spirale allora comunica. Questa carica varia di conserva con la forza elettromotrice, e ne rappresenta in ogni istante il valore. A un dato punto del movimento il bilanciere battendo contro l'estremità della leva x, la solleva ed interrompe la comunicazione della spirale col condensatore: nel quale resta così presa una carica che corrisponde al valore della forza elettromotrice nel momento dell' interruzione, e che viene poi misurata coll'elettrometro nel modo che sappiamo.

Il punto dell'interruzione si regola per mezzo dell'altezza a cui vien fissata la leva x, e si determina come ho detto con una linea tracciata sulla superficie del cilindro. Durante il movimento del pendolo si fa suonare la sirena tenendola abbassata, cosicchè la punta vibrante descrive sul cilindro una curva, e dalla lunghezza delle sue sinuosità si deduce la velocità del movimento.

Se ora tenendo sempre invariata la posizione del sistema inducente e del punto d'interruzione si fanno così delle serie di esperienze:

1) cambiando da un'esperienza all'altra soltanto il numero *n* dei giri della spirale indotta;

2) variando solo la velocità *v* del movimento;

3) facendo variare solo l'intensità della corrente inducente, ove si tratti d'induzione elettrodinamica;

si possono verificare le tre leggi sopraccennate ad una ad una, e anche se ne può verificare il complesso facendo variare insieme più d'una delle dette circostanze.

26. Per poter intraprendere delle misure secondo il piano divisato, era d'uopo che io mi accertassi prima sperimentalmente se così sarebbe soddisfatta sufficientemente la condizione supposta che la carica del condensatore corrisponda in ogni istante al valore attuale della forza elettromotrice indotta, il che richiede che il tempo necessario allo stabilirsi dell'equilibrio elettrostatico nel filo e nei piatti (1) sia piccolo di fronte ai tempi in cui nel corso del-

(1) Per effetto della forza elettromotrice vi è un movimento di elettricità dalla spirale verso il condensatore, tendente a stabilire sui due piatti una differenza di potenziale elettrostatico corrispondente a quella forza. L'equazione che rappresenta approssimativamente questo movimento si determina facilmente. — Se E è il valore della forza elettromotrice in un dato istante t, R la resistenza del filo, Q la quantità di elettricità che ha già ricevuto il condensatore al tempo t; trascurando la carica del filo ed applicando la legge di Ohm, si ha per l'intensità della corrente

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{R}\left(E-\frac{Q}{C}\right).$$

Per E costante l'integrale di questa equazione è

$$Q=EC-(EC-Q_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

dove Q_0 rappresenta la carica esistente sul piatto al tempo $t=0$. Supponendo $Q_0=0$, si ha

$$Q=EC\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right);$$

e il tempo τ che occorre per avere una carica il cui rapporto alla carica finale E C non differisca dall'unità che di una data quantità, ε è

$$\tau=-RC\log.\varepsilon$$

l'esperienza si manifestano variazioni sensibili della forza elettromotrice stessa. Io feci a quest'oggetto varie esperienze, da cui risultò l'accennata condizione essere verificata, e che riferirò brevemente.

Con la medesima disposizione che mi ha servito nelle esperienze del capitolo precedente, io prendeva sul filo di derivazione percorso dalla corrente di una coppia Bunsen, due punti, di cui l'uno veniva messo in comunicazione colla terra, e l'altro coi piatti A ed A' dei due condensatori riuniti. Quest'ultima comunicazione era stabilita coll'intermezzo dell'interruttore e di una spirale nel modo seguente. Il filo proveniente da quel punto andava al serrafili della leva della parte sinistra dell'interruttore, dove il pezzo metallico opposto era tenuto stabilmente in comunicazione coi piatti B e B' e al tempo stesso colla terra. Una spirale fatta con 70 m. di filo di rame di 0,4 mm. di diametro e di maggior resistenza di tutte le spirali indotte da me impiegate in seguito, era riunita per un capo alla detta leva di sinistra e per l'altro alla leva x di destra. Finalnalmente il pezzo sottoposto a questa era collegato ai piatti A ed A'. Con tale disposizione, fintantochè ambedue le parti dell'interruttore son chiuse, i piatti superiori ed inferiori comunicano fra di loro e colla terra, e non può esservi alcuna carica: all'aprire della parte sinistra i piatti A, A' rimangono isolati dagli altri piatti e dalla terra, e comunicano con l'intermezzo della spirale col punto di derivazione; la quale comunicazione viene poi interrotta al sollevare della leva x di destra.

Tolto il pendolo, di cui io qui non mi serviva, si regolava la posizione delle leve in modo che al girare del bilanciere avvenisse prima l'interruzione di sinistra, e poi dopo un certo intervallo tenesse dietro quella di destra. Nel tempo t che correva fra le due interruzioni l'elettricità affluiva ai piatti A, A'; e la carica così ottenuta in essi, che dopo la seconda interruzione vi rima-

neva racchiusa, si misurava al modo solito. Il tempo t, che si faceva variare a piacere regolando l'altezza delle due leve e la velocità del bilanciere, che veniva girato a mano, era misurato per mezzo della sirena nel modo indicato dianzi.

La tavola seguente contiene i risultati di una serie di queste esperienze. L'intervallo preso sul filo di derivazione è lo stesso per tutte e di 2 metri. Nella colonna I sono indicati gl'intervalli t di tempo durante i quali nelle varie esperienze il condensatore è esposto all'azione della forza elettromotrice, espressi per il numero delle vibrazioni della sirena comprese fra le due interruzioni, cioè in 512.mi di secondo. Le esperienze notate con $t = \infty$ son fatte tenendo la prima interruzione sempre aperta, con che il condensatore è costantemente in comunicazione colla sorgente elettrica fino all'istante del sollevamento della seconda leva x, e servono a far conoscere la carica finale o di equilibrio corrispondente alla forza elettromotrice attuale.

PROSPETTO IV

Tempo occorrente per caricare il condensatore.
Due cond. riuniti.

N.° d'ordine	I Vibrazioni t	II Deviazioni x
1	∞	29. 90
2	1. 2	27. 65
3	1. 6	29. 40
4	2. 2	28. 20
5	∞	29. 90
6	0. 8	29. 75
7	1. 3	29. 80
8	2. »	29. 80
9	∞	29. 80
10	1. »	29. 70
11	0. 5	29. 60
12	0. 3	29. 00

I numeri delle prime 4 esperienze presentano delle irregolarità. Mi avvidi che ciò era dovuto alla poca bontà dei contatti nei punti d'interruzione, dove, a non porci cura, può essere offerta al passaggio dell'elettricità una resistenza molto maggiore di quella di tutto il rimanente circuito metallico. D'allora in poi ho atteso sempre con cura ad avere buoni contatti, mantenendo ben pulite le superficie opposte ed assicurandomi ad ogni volta che esse fossero ben premute l'una contro l'altra.

Per tutte le altre esperienze le deviazioni dell'elettrometro sono quasi costanti, fuori dell'ultima che

corrisponde a $\frac{3}{10}$ di vibrazione, tempo assai piccolo e prossimo al limite a cui può arrivare l'interruttore. Ad ogni modo risulta certamente dai numeri ottenuti che il caricarsi del condensatore fino ad una differenza dalla carica finale che non oltrepassi il centesimo di questa, richiede nelle presenti condizioni un tempo non superiore alla durata di mezza oscillazione, ossia prossimamente ad $\frac{1}{1000}$ di secondo.

Questo tempo, il quale cresce proporzionalmente alla capacità del condensatore ed alla resistenza del cammino che l'elettricità deve percorrere, non poteva che essere minore in tutte le esperienze sull'induzione di cui si tratta in questo capitolo, nelle quali la capacità del condensatore è uguale o minore (quando si fa uso del solo condensatore A), e le spirali adoperate hanno tutte una resistenza minore della presente. Ora nella disposizione con cui si sperimentava, le variazioni della forza elettromotrice d'induzione negl'istanti precedenti immediatamente all'interrompersi della comunicazione fra la spirale ed il condensatore erano tali da non averne alcun cambiamento sensibile in $\frac{1}{1000}$ di secondo. Onde la supposta condizione era realmente soddisfatta.

27 Il sistema inducente era costituito secondo i casi da una calamita temporaria, o da una calamita permanente, o da un circuito elettrodinamico. Per la prima mi sono servito del noto apparecchio di Ruhmkorff relativo alla rotazione magnetica del piano di polarizzazione, che era messo in azione da una pila di 3 elementi Bunsen; la seconda era una calamita d'acciaio a ferro di cavallo appartenente ad una macchina magneto elettrica di Clarke e capace di portare un peso di Kil. 2,5; ed il circuito elettrodinamico infine consisteva in una spirale anulare a sezione rettangolare, alta 3 cm. con un diametro esterno di 14 cm. ed un interno di 6 cm. fatta con un grosso filo di rame a rivestitura di seta avvolto sopra un disco di legno scavato sul contorno.

Il rocchetto indotto consisteva in un disco di ebanite dell'altezza di mm. 8, munito sul contorno di una scanalatura rettangolare larga mm. 4 e profonda mm. 5, sulla quale si avvolgeva del filo di rame molto sottile, rivestito di uno strato di collodio anch'esso sottilissimo, e tuttavia sufficientemente isolante (diametro del filo nudo mm. 0,35, e colla rivestitura mm. 0,5); di modo che fino a 100 giri potevano essere contenuti nella gola del rocchetto. La quale era stata fatta così piccola perchè i giri potessero senza errore sensibile essere considerati come tutti uguali di grandezza e di posizione rispetto al sistema inducente. Ho fatto uso talvolta anche di un altro rocchetto eguale in tutto al precedente, salvo che la gola era più grande, in modo da poter contenere fino a 200 giri del medesimo filo.

Le due estremità del filo erano fissate a due piccoli serrafili impiantati l'un presso all'altro sul contorno del rocchetto, e dai quali poi partivano due altri fili destinati a stabilire le comunicazioni, come ora dirò. Così si poteva senza toccar questi fare i cambiamenti che si volevano nella spirale. Mediante una vite di pressione il rocchetto, che era traforato al centro, si fissava all' asta del pendolo, o nel piano verticale d'oscillazione, corrispondentemente al foro E_2, o in un piano orizzontale per mezzo del foro E_3 al di sotto della ripiegatura. Di là i due fili suddetti provenienti dalle estremità della spirale erano condotti, tenendoli tesi e distaccati dall' asta, all' asse di sospensione coperto di rivestitura isolante, al quale erano fissati, e d'onde proseguendo ravvolti per un certo tratto ad elica elastica andavano a terminare ai serrafili delle due leve d'interruzione. La leva x di destra comunicava, per mezzo del pezzo sottoposto e di un filo isolato condotto da questo col condensatore, finchè rimaneva abbassata; e quella di sinistra era tenuta costantemente in comunicazione colla terra, e restava inattiva in tutte

queste esperienze, in cui non si faceva uso propriamente che della parte destra dell'interruttore, servendo solo come un mezzo comodo per tener fisso e in comunicazione colla terra un capo del filo. Così la spirale indotta aveva un'estremità collegata costantemente colla terra, e l'altra estremità comunicava col condensatore fino al momento dell'interruzione, essendo del resto completamente isolata e rimanendo pienamente libero il movimento del pendolo.

L'apparecchio di Ruhmkorff e la calamita d'acciaio si disponevano sotto all'asse di sospensione del pendolo colla linea dei poli perpendicolare al piano di oscillazione, il primo orizzontalmente, e la seconda colle branche verticali e volte in alto: di modo che all'oscillare del pendolo il rocchetto indotto, posto in questo caso verticalmente, veniva, portato dall'asta, a passare nel punto più basso della sua traiettoria attraverso lo spazio vuoto esistente fra i due poli. La distanza delle branche della calamita di acciaio è di 58 mm., e pressapoco ad ugual distanza si tenevano i poli dell'apparecchio di Ruhmkorff; e sì nell'una che nell'altro la spirale indotta era fatta passare giusto nel mezzo, senza che a ciò facesse ostacolo la ripiegatura inferiore dell'asta larga solo 3 centimetri.

La spirale elettrodinamica si collocava in piano sotto all'asse di sospensione, in modo che nella posizione di riposo del pendolo il rocchetto indotto, fissato qui orizzontalmente al di sotto della ripiegatura dell'asta, le fosse sopra parallelo e concentrico.

Il pendolo era in tutte le esperienze sollevato ad una medesima altezza, a cui era mantenuto fermo con un semplice congegno che non mi trattengo a descrivere, e d'onde poi lo si lasciava cadere abbandonandolo a sè stesso. A un certo punto della caduta il bilanciere zz', che si moveva insieme col pendolo, sollevava la leva,

la quale era disposta in modo che una volta sollevata era impedita di ricadere e non era più toccata nel movimento di ritorno del pendolo, il quale poteva dopo oscillare innanzi e indietro senza produrre alcun effetto.

L'istante dell'interruzione si determinava, regolando la posizione del sistema inducente e l'altezza della leva *x*, dietro una serie di tentativi ed esperienze preliminari, in modo che corrispondesse prossimamente al massimo della forza elettromotrice indotta durante il movimento, il che avveniva un poco prima che il centro della spirale indotta arrivasse al mezzo dello spazio compreso fra i due poli delle calamite o al di sopra del centro della spirale inducente.

28 Riferirò ora le varie serie di esperienze fatte effettivamente per la verificazione delle tre leggi suddette (num. 22), incominciando dalla proporzionalità della forza elettromotrice al numero dei giri della spirale indotta.

Dalle indicazioni date nei numeri precedenti risulta già come le esperienze erano condotte. Tuttavia per più chiarezza ridirò per ordine la successione delle operazioni relative a ciascuna.

S'incominciava col regolare come ho detto la posizione del sistema inducente, stabilmente e per tutta la serie di esperienze da paragonarsi fra loro. Il punto d'interruzione veniva contrassegnato con una linea tracciata sulla superficie annerita del cilindro, e si riscontrava poi nel corso delle esperienze di tempo in tempo per riconoscere se per avventura non avesse subito qualche spostamento per effetto dei ripetuti colpi del bilanciere sulla leva *x*, nel qual caso si riconduceva alla posizione di prima.

Dopo di che si procedeva per ogni esperienza alle seguenti operazioni.

1) Si adattava sull'asta del pendolo la spirale

indotta col voluto numero di giri. Questo richiedeva molta attenzione per non alterare da esperienza a esperienza la posizione relativa dei sistemi inducente e indotto.

2) Si sollevava il pendolo all'altezza fissata, si abbassava la leva x badando al buon contatto dei pezzi metallici opposti, e si aggiustava la sirena; e poi si andava ad osservare nel cannocchiale la posizione di riposo dell'elettrometro.

3) Si lasciava cadere il pendolo nello stesso tempo che si faceva suonare la sirena, badando a farne cessare il suono o sollevarla appena avvenuta l'interruzione e prima che il pendolo ricadesse, altrimenti nel moto di ritorno la punta vibrante avrebbe guastata la curva già tracciata.

4) Si misurava nel modo che sappiamo la carica del condensatore.

5) Si misurava la velocità del movimento del pendolo all'istante dell'interruzione, misurando la lunghezza che occupava una vibrazione sulla curva tracciata dalla sirena nella parte che precede immediatamente il punto d'interruzione; o, ciò che è lo stesso e che d'ordinario ho preferito perchè più comodo, contando il numero di vibrazioni contenute in un dato tratto di quella parte di curva, abbastanza piccolo perchè le vibrazioni abbiano in esso sensibilmente la stessa lunghezza, e prendendo l'inversa di quel numero. D'onde poi tenendo conto del raggio del cilindro, della distanza del rocchetto dall'asse di sospensione e della nota della sirena, si rilevava la velocità effettiva del centro del rocchetto. Nelle esperienze di cui si parla presentemente essa doveva rimaner costante per tutta una serie: ed è solo per accertarsi di ciò che veniva misurata direttamente ogni volta. Siccome il pendolo era fatto cadere sempre da una medesima altezza, e da esperienza a esperienza non

vi era altro di variato che il numero di giri della spirale indotta, la sola causa che potesse alterare la velocità era la variazione di peso della spirale. Per togliere anche questa, si cominciava col maggior numero di giri, e poi i tratti di filo staccati via via dalla spirale venivano ravvolti sopra un piccolo rocchetto fissato al centro del rocchetto d'induzione.

Le dette operazioni ch'io poteva fare comodamente da me solo, si compivano in 3 o 4 minuti. Ogni esperienza veniva poi ripetuta una seconda volta dopo aver barattati fra loro i fili che andavano alla parte destra e sinistra dell'interrutore, con che si cambiava il segno della forza elettromotrice; e si prendeva poi la media dei due valori così ottenuti.

Darò i risultati di due serie di queste esperienze, l'una fatta con la calamita d'acciaio e l'altra coll'apparecchio di Ruhmkorff, incominciando dalla prima.

In questa il numero dei giri fu fatto variare da 100 a 5. La velocità del centro della spirale indotta nell'istante dell'interruzione era di m. 4, 2 al secondo. Si sperimentava coi due condensatori riuniti; nelle due prime esperienze, corrispondenti a 100 e 75 giri, in modo diretto, e nelle altre col metodo differenziale (*v. n.* 19) tenendo il piatto B in comunicazione col polo negativo di una pila di due elementi Daniell. La deviazione X che si aveva in quest'ultimo modo senza forza elettromotrice, era sensibilmente costante ed uguale a 12, 9. Nel seguente prospetto la colonna I indica per ciascuna esperienza il numero n dei giri; le colonne II e III indicano le deviazioni x_1 e x_2 ottenute tenendo rispettivamente l'estremità positiva e la negativa della spirale indotta in comunicazione col condensatore, le due colonne seguenti danno le cariche y_1, y_2 (ordinate dalla curva I. Tav. II.) corrispondenti alle deviazioni x_1, x_2. I numeri della colonna VI (i quali sono ottenuti pren-

dendo la semisomma delle $y_1\, y_2$ per le due prime esperienze e la semidifferenza per le altre), rappresentano le cariche dovute alla forza elettromotrice d' induzione, della quale danno perciò la misura. Moltiplicandoli per il fattore costante 2,27 se ne deduce l' espressione. E della forza elettromotrice stessa in centesimi della forza elettromotrice D di un elemento Daniell, quale è notata nella colonna VII. Finalmente l' ultima colonna contiene il rapporto $\frac{E}{n}$ della forza elettromotrice così misurata al corrispondente numero di giri della spirale indotta, il qual rapporto per la legge da verificarsi dovrebbe esser costante per tutte le esperienze.

Per miglior esattezza ogni determinazione veniva ripetuta due volte, e si prendeva la media delle due osservazioni, come si vede dalle colonne II e III, dove ho registrato separatamente l'una e l'altra.

Come ho già detto altra volta, nella lettura delle deviazioni non si può rispondere dell'esattezza della seconda cifra decimale, che risulta da una valutazione approssimativa ad occhio.

PROSPETTO V.

Proporzionalità della forza elettrom. indotta al num. *n* dei giri. — Calamita d'acciaio. — Velocità *v* costante e uguale a 4, 2. —

		I n	II x_1		III x_2		IV y_1	V y_2	VI $\frac{y_1+y_2}{2}$	VII E (D=100)	VIII $\frac{E}{n}$
Misura diretta	1	100	1. 45 1. 40	1. 42	1. 30 1. 30	1. 30	7. 40	7. 15	7. 27	16. 50	0. 165
»	2	75	0. 70 0. 70	0. 70	0. 60 0. 65	0. 62	5. 55	5. 25	5. 40	12. 26	0. 163
Mis. differ.° (X=12. 9)	3	50	16. 55 16. 65	16. 60	9. 20 9. 20	9. 20	25. 60	18. 15	3. 72	8. 44	0. 168
»	4	35	15. 70 15. 60	15. 65	10. 40 10. 40	10. 40	24. 65	19. 40	2. 62	5. 95	0. 170
»	5	25	14. 60 14. 70	14. 65	11. 10 11. 05	11. 07	23. 65	20. 07	1. 79	4. 06	0. 162
»	6	20	14. 30 14. 25	14. 27	11. 35 11. 40	11. 37	23. 27	20. 37	1. 45	3. 29	0. 164
»	7	15	13. 80 13. 95	13. 87	11. 60 11. 65	11. 62	22. 87	20. 62	1. 12	2. 54	0. 169
»	8	10	13. 45 13. 45	13. 45	12. 05 11. 95	12. 00	22. 45	21. 00	0. 72	1. 64	0. 164
»	9	5	13. 20 13. 20	13. 20	12. 50 12. 45	12. 47	22. 20	21. 47	0. 36	0 82	0. 164

I rapporti dell'ultima colonna differiscono come si vede, ben poco l'uno dall'altro; e la proporzionalità delle forze elettromotrici al numero dei giri apparisce manifestamente.

Una seconda serie fu fatta coll'apparecchio di Ruhmkorff magnetizzato dalla corrente di una pila di 3 elementi Bunsen. La distanza dei due poli fra cui passava la spirale indotta era di 6 centim. Non presi alcuna disposizione per riparare al graduale indebolimento della

corrente, e solo ebbi cura di non tener chiusa la pila che per il tempo strettamente necessario alle esperienze. Il numero dei giri variò da 100 a 1. Ogni determinazione fu fatta solo una volta. Quanto al resto tutto procedeva come nelle esperienze precedenti. I risultati sono contenuti nel seguente prospetto, che ha la stessa disposizione di quel di sopra.

PROSPETTO V. (bis)

Proporzionalità della forza elettromotrice indotta al num. *n* dei giri — Apparecchio di Ruhmkorff magnetizzato da 3 Bunsen — Velocità *v* costante e uguale a 4, 2.

		I n	II x_1	III x_2	IV y_1	V y_2	VI $\frac{y_1 \pm y_2}{2}$	VII E (D=100)	VIII $\frac{E}{n}$
Misura diretta	1	100	31, 20	30, 80	40. 20	39, 80	40, 00	90, 80	0, 908
»	2	90	27, 00	26, 55	36, 00	35, 55	35, 77	81, 20	0, 902
»	3	80	22. 65	22, 20	31, 65	31, 20	31, 42	71, 32	0, 891
»	4	70	18, 70	18, 45	27, 70	27, 45	27, 57	62, 58	0, 894
»	5	60	14, 65	14, 30	23, 65	23, 30	23, 47	53, 28	0, 888
»	6	50	10, 55	10, 10	19. 55	19, 10	19, 32	43, 86	0, 877
»	7	40	6, 85	6. 60	15, 50	15, 22	15, 36	34, 87	0, 871
»	8	30	3, 70	3, 50	11, 33	11, 04	11, 18	25, 38	0, 846
Mis. differenz.	9	20	20, 30	6, 00	29, 30	14, 47	7, 41	16, 82	0, 841
(X=12. 9)	10	15	18, 45	7, 50	27, 45	16, 30	5, 57	12, 64	0, 843
»	11	10	16, 45	9, 35	25, 45	18, 30	3, 57	8, 10	0, 810
»	12	8	15, 80	9, 95	24, 80	18, 94	2, 93	6, 65	0, 831
»	13	6	15, 20	10, 55	24, 20	19, 55	2, 32	5, 26	0, 877
»	14	4	14, 55	11, 25	23, 55	20, 25	1, 65	3, 75	0, 837
»	15	3	14, 10	11, 85	23, 10	20, 85	1, 12	2, 54	0, 947
»	16	2	13; 70	12, 15	22, 70	21, 15	0, 77	1, 75	0, 875
»	17	1	13, 30	12, 55	22, 30	21, 55	0, 37	0, 84	0, 840

Anche qui i rapporti dell'ultima colonna sono sufficientemente costanti. La leggera e graduale diminuzione che si osserva procedendo dai primi agli ultimi è dovuta certamente all'indebolimento della corrente.

29 Le esperienze relative alla proporzionalità della forza elettromotrice indotta alla velocità del mo-

vimento erano condotte nello stesso modo delle precedenti: solo che qui la spirale indotta era sempre uguale e di 200 giri, e si faceva variare invece da volta a volta la velocità. A ciò servivano due dischi di piombo forati al centro, l'uno del peso di kil. 0,3 e l'altro di kil. 0,7, che, come ho già detto, potevano venire fissati all'asta del pendolo il primo corrispondentemente al foro E_1, ed il secondo a diversa altezza lungo la fenditura nella parte superiore dell'asta. Così si poteva passare per tutti i gradi intermedii da un movimento lentissimo ad una velocità di circa 5 metri al secondo pel centro del rocchetto nel punto più basso della sua traiettoria.

Darò qui i prospetti dei risultati di due serie di tali esperienze, l'una relativa alla calamita d'acciaio e l'altra all'apparecchio di Ruhmkorff. Nella prima colonna sono registrati i numeri s di vibrazioni o sinuosità contate sulla curva in un tratto di 10 mm.; nella colonna seguente (I bis.) sono indicate in unità di metro e secondo le corrispondenti velocità v del centro del rocchetto calcolate colla formola

$$v = \frac{0{,}01 \frac{50}{8}}{\frac{s}{512}} = \frac{32}{s},$$

essendo $\frac{50}{8}$ il rapporto del raggio dell'arco descritto dal centro del rocchetto al raggio del cilindro, e 512 il numero di vibrazioni al secondo della sirena. Nell'ultima colonna son contenuti i rapporti $\frac{E}{v}$ delle forze elettromotrici alle velocità, i quali dovrebbero essere costanti. In tutto il resto i prospetti sono uguali ai precedenti. Le esperienze furono fatte con due condensatori e tutte con misura diretta delle cariche. Ogni determinazione fu ripetuta due volte.

PROSPETTO VI.

Proporzionalità della forza elettrom. alla velocità v — Numero n di giri costante e uguale a 200. — Calamita d'acciaio.

		I	I bis	II		III		IV	V	VI	VII	VIII
		s	v	x_1		x_2		y_1	y_2	$\frac{y_1+y_2}{2}$	E (D=100)	$\frac{E}{v}$
Misura diretta	1	7,0	4,57	12,80 12,90	12,85	12,40 12,40	12,40	21,85	21,40	21,62	49,08	10,74
»	2	9,3	3,44	7,50 7,60	7,55	7,30 7,30	7,30	16,35	16,07	16,21	36,80	10,70
»	3	10,8	2,96	5,75 5,70	5,72	5,55 5,45	5,50	14,13	13,86	14,00	31,78	10,73
»	4	12,3	2,60	4,45 4,45	4,45	4,20 4,20	4,20	12,44	12,10	12,27	27,85	10,71

PROSPETTO VI. bis

Proporzioni della forza elettrom. alla vel. v. — n cost. = 200. — App. di Ruhmkorff con 3 Bunsen.

		I	I bis	II		III		IV	V	VI	VII	VIII
		s	v	x_1		x_2		y_1	y_2	$\frac{y_1+y_2}{2}$	E (D=100)	$\frac{E}{v}$
Misura diretta	1	8,2	3,90	28,80 28,10	28,05	27,45 27,45	27,45	37,05	36,45	36,75	83,42	21,39
»	2	9,6	3,33	22,50 22,60	22,55	22,20 22,10	22,15	31,55	31,15	31,35	71,16	21,37
»	3	10,9	2,93	18,80 18,80	18,80	18,40 18,60	18,50	27,80	27,50	27,65	62,76	21,42
»	4	12,1	2,64	15,90 15,90	15,90	15,55 15,45	15,50	24,90	24,50	24,70	56,07	21,24
»	5	16,8	1,90	9,10 9,00	9,05	8,70 8,50	8,60	17,98	17,52	17,75	40,29	21,20
»	6	21,6	1,48	5,65 5,70	5,67	5,35 5,25	5,30	14,07	13,60	13,83	31,39	21,21

Anche qui è notevole la costanza dei rapporti delle ultime colonne, onde vien messa in evidenza la proporzionalità della forza elettromotrice indotta alla velocità del movimento.

30. Dirò infine delle esperienze fatte per verificare la proporzionalità della forza elettromotrice indotta all'intensità della corrente inducente nel caso dell'induzione elettrodinamica.

Ho già indicato qual era la spirale inducente, e come essa e la spirale indotta venivano disposte. Da esperienza a esperienza non vi era nulla di mutato fuori che l' intensità della corrente inducente, la quale si faceva variare e si misurava nel modo che son per dire.

Due serrafili a più fori, ai quali facevano capo da un lato i fili provenienti dai poli di una pila di 2 elementi Bunsen, e dall'altro gli estremi della spirale inducente, erano riuniti fra loro per mezzo di un ponte o filo trasversale di lunghezza variabile, per modo che la spirale non era percorsa dall'intera corrente della pila, ma solo da una parte derivata, la cui grandezza si poteva far variare inserendo maggiore o minore lunghezza del filo trasversale fra i due serrafili. Per misurarla serviva una bussola a specchio di Weber, dove in luogo del suo circuito ordinario, con cui non avrebbe potuto usarsi qui per troppa sensibilità, si adoperava un solo giro di filo avvolto sopra il castello, ed inserito poi nel circuito della spirale induducente. La scala graduata ed il cannocchiale erano collocati dinnanzi alla bussola alla distanza di 2 m. dallo specchio. Si sapeva già per esperienze fatte altre volte che in questo modo, e con deviazioni minori di 15 gradi come quelle che si avevano qui, i numeri letti nella scala erano proporzionali all' intensità della corrente. La lettura dava direttamente i decimi di grado (millimetri della scala), e si potevano valutare ad occhio i mezzi decimi con sufficiente sicurezza.

La distanza fra le facce opposte, parallele ed orizzontali, delle spirali inducente ed indotta nella posizione di riposo del pendolo, in cui esse si trovavano concentricamente l'una sopra dell'altra, cioè la distanza minima, era di 9 mm.

Ecco senz'altro i risultati di una serie di tali esperienze. Essa è fatta con due condensatori e con misura differenziale delle cariche. La spirale indotta era di 100 giri, e la velocità del suo centro nel momento dell'interruzione 4,8. Le esperienze erano condotte come quelle dei numeri precedenti. Ogni determinazione fu fatta una sola volta. La colonna I indica l'intensità della corrente inducente misurata come ho detto, cioè il numero i letto sulla scala della bussola; l'ultima indica il rapporto $\frac{E}{i}$ del valore ottenuto dall'esperienza per la forza elettromotrice a quell'intensità. Per il resto il prospetto è uguale agli altri.

PROSPETTO VII

Proporzionalità della forza elettromotrice indotta all' intens. i della corr. inducente. — n cost. = 100; v cost. = 4,8

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
		i	x_1	x_2	y_1	y_2	$\frac{y_1-y_2}{2}$	E (D=100)	$\frac{E}{i}$
Misur. differenz. (X=12. 95)	1	6. 60	17. 60	8. 40	26. 60	17. 30	4. 65	10. 55	1. 76
»	2	4. 45	16. 40	9. 50	25. 40	18. 46	3. 47	7. 88	1. 77
»	3	3. 60	15. 80	10. 10	24. 80	19. 10	2. 85	6. 47	1. 80
»	4	2. 45	14. 80	11. 10	23. 80	20. 10	1. 85	4. 20	1. 71
»	5	1. 30	13. 90	11. 95	22. 90	20. 95	0. 97	2. 20	1. 69
»	6	0. 65	13. 50	12. 50	22. 50	21. 50	0. 50	1. 13	1. 74

I numeri dell'ultima colonna sono abbastanza costanti, di modo che anche la proporzionalità della forza elettromotrice E all'intensità della corrente inducente è sufficientemente dimostrata.

Riguardando poi l'insieme delle misure relative alle tre leggi, si vede che l'accordo è in tutte eccellente. Di modo che questa verificazione fatta così studiando direttamente la forza elettromotrice con misure elettrostatiche, è paragonabile per precisione di risultati alle migliori misure eseguite finora nel campo dell'induzione col mezzo del galvanometro, e perciò non è priva d'interesse, sebbene si tratti di leggi notissime.

Altre esperienze si sarebbero potute fare con la medesima disposizione variando le altre condizioni da cui dipende la forza elettromotrice indotta, come per es. la grandezza e la forma dei giri della spirale indotta, la sua posizione rispetto al sistema inducente, ec.; ed alcune io ne ho fatte realmente. Ma io credo che bastino le già riferite pel mio scopo presente, che era quello di dare sopra un soggetto noto un saggio di applicazione dell'apparecchio descritto.

V

Esperienze sulla variazione del magnetismo in una massa di ferro dolce.

31. Nell'induzione elettrodinamica le forze elettromotrici indotte per apertura o chiusura del circuito primario si svolgono con grande rapidità, tanto che è generalmente difficile di potere tener dietro colle misure alle loro variazioni. Non è più così però, allorchè la spirale inducente ha un nocciolo di ferro dolce. Allora il magnetismo della massa di ferro non si stabilisce o cessa istantaneamente o, per parlare con maggiore precisione, in quel periodo minimo

di tempo che occorre allo stabilirsi o al cessare della corrente per sè stessa, ma richiede un tempo più grande, durante il quale cresce o decresce con continuità fino al valore finale. Alle variazioni del magnetismo corrisponde in tutto quel tempo un proporzionale svolgimento di forza elettromotrice nella spirale indotta, abbastanza lento in generale perchè si possa seguirne il progresso coll'esperienza. Onde si ha poi un mezzo acconcio, misurando la forza elettromotrice indotta, di studiare la legge di quelle variazioni medesime. A ciò si riferiscono le esperienze che mi restano ad esporre.

Lo studio della legge con cui varia col tempo il magnetismo di una massa di ferro dolce e delle circostanze che vi hanno influenza ha già dato luogo a varie ricerche di Fisici, ed è ancor lungi dall' essere esaurito. Non è però mio proposito ora di entrare a trattare ordinatamente di questo argomento, e non farò che descrivere semplicemente le esperienze fatte, come saggio dell'uso che può farsi dell'apparecchio per lo studio di tale soggetto.

Queste esperienze, tolto ciò che riguarda la misura delle forze elettromotrici, sono fatte allo stesso modo di quelle pubblicate dal Prof. Felici nel citato lavoro. Io mi son servito oltre che del suo interruttore anche della stessa elettrocalamita e della spirale indotta da lui adoperata, dappoichè egli gentilmente me l'ha concesso. Ciò mi dispensa dal trattenermi sui particolari già esposti accuratamente dal Felici stesso: onde, dopo quello che ho già detto fin qui, non mi occorrono che poche parole di descrizione.

La spirale indotta fatta di 160 giri di filo rivestito di guttaperka avvolti in 4 strati sopra l' elettrocalamita, aveva uno de' suoi capi in comunicazione colla terra, e l'altro andava alla parte destra dell'interruttore, d'onde per mezzo di un filo isolato comunicava col condensatore.

Per elettrocalamita serviva uno dei due rocchetti di un'ordinaria calamita di Pouillet, nel cui vuoto interno

era un cilindro massiccio di ferro dolce. Le estremità del filo del rocchetto erano messe in comunicazione coi poli di una coppia di Bunsen, coll'intermezzo dell'altra parte dell'interruttore, in guisa che battendo col bilanciere zz' contro la leva, si poteva nel modo che ora dirò produrre a piacere la circolazione o la cessazione della corrente nell'elettrocalamita, secondo la maniera con cui erano disposte le comunicazioni.

Per produrre così la cessazione della corrente, si metteva una delle estremità del rocchetto stabilmente in comunicazione con un polo della pila, e l'altra estremità e l'altro polo in comunicazione rispettivamente col serrafili della leva e con quello del pezzo opposto. Per produrre poi nello stesso modo la circolazione della corrente nel filo dell'elettrocalamita, si tenevano tanto i due capi di questo filo che i due poli della pila in comunicazione l'uno colla leva, e l'altro col pezzo opposto. Così a interruzione chiusa l'elettrocalamita è esclusa dal circuito della corrente, che va da un polo della pila all'altro direttamente attraverso i pezzi a contatto dell'interruttore, salvo una piccola derivazione che circola nella calamita, e che può rendersi insensibile ponendo cura alla bontà del contatto fra i detti pezzi, come si verifica con un galvanómetro. Quando poi si apre l'interruzione, la corrente cui è interrotta la via attraverso questa, invade l'elettrocalamita e vi circola tutta intera.

Si regolava la posizione delle due leve in guisa che la prima ad essere colpita era quella pel cui mezzo veniva così stabilita o soppressa la corrente nella spirale dell'elettrocalamita, e poi dopo un certo intervallo convenientemente scelto e variabile da esperienza a esperienza, veniva colpita l'altra leva, con che s'interrompeva la comunicazione della spirale indotta col condensatore. Alla prima interruzione tien dietro lo stabilirsi o il cessare del magnetismo del nocciolo di ferro, non ad un tratto ma con

variazione continua', accompagnata da sviluppo di forza elettromotrice nella spirale indotta e carica corrispondente del condensatore con cui la spirale comunica. A un certo punto e prima che sia compiuto il periodo di quelle variazioni avviene il distacco della seconda leva, e interrotta con ciò la comunicazione col condensatore, resta in questo la carica che vi era all'istante dell'interruzione. La quale misurata nell'elettrometro serve a far conoscere il valore della forza elettromotrice, e corrispondentemente la variazione del magnetismo in quell'istante.

L'interruttore da cui si era levato via il pendolo si moveva a mano, il che era più comodo; e si determinava poi nel modo già indicato, per mezzo del cilindro annerito e della sirena, la posizione delle due interruzioni e l'intervallo di tempo che nelle singole esperienze correva fra l'una e l'altra. Siccome era impossibile operando a mano di poter avere sempre due volte di seguito la stessa velocità, ogni misura veniva eseguita una sola volta, e si faceva poi, occorrendo, sui risultati la correzione dell'errore dovuto alla carica interna del condensatore (n. 20). Credo inutile di aggiungere altri ragguagli intorno al modo con cui le esperienze erano condotte, poichè per ciò che riguarda la misura delle forze elettromotrici ne ho già discorso abbastanza per l'addietro; e quanto al resto, ripeto, non avrei che a riportare descrizioni ed osservazioni già svolte particolareggiatamente e con grande accuratezza nel citato lavoro del Prof. Felici.

32. Facendo delle serie di esperienze nelle stesse condizioni e con diversi intervalli di tempo, si avranno dall'elettrometro delle serie di numeri, dalle quali si potrà rilevare la legge con cui varia il magnetismo della massa di ferro, poste le ipotesi seguenti:

1) che la carica del condensatore corrisponda in ogni istante al valore attuale della forza elettromotrice;

2) che all'istante della seconda interruzione sia nulla

o trascurabile l'induzione elettrodinamica dovuta alla spirale magnetizzante.

Per la prima ipotesi si ha il criterio dei dati sperimentali già riportati (num. 26) sul tempo che impiega il condensatore a caricarsi. La seconda può fino a un certo punto riscontrarsi sperimentando in egual condizione senza il nocciolo di ferro, nel qual modo io la trovai sensibilmente verificata nelle mie esperienze per intervalli di tempo non minori di una mezza vibrazione della sirena, cioè prossimamente di un millesimo di secondo; e si può anche nel caso che non sia verificata, determinare nello stesso modo la correzione da farsi per il suo effetto sui risultati. Però solo fino a un certo punto, perchè vi sarebbe da tener conto anche della reazione che, specialmente nel caso della chiusura, esercita il magnetismo del ferro sulla corrente primaria prolungandone il periodo variabile.

Convien osservare inoltre che la forza elettromotrice indotta nella spirale secondaria corrisponde propriamente alle variazioni del potenziale elettromagnetico del magnetismo del ferro sopra la spirale; e per indurne le variazioni del magnetismo stesso o, per parlar con più precisione, della funzione potenziale del magnetismo, converrebbe aver riguardo alla distribuzione di questo, cioè alla posizione delle masse magnetiche relativamente alla spirale indotta, e tener conto anche di un fatto poco studiato finora e che qui può avere influenza; voglio dire del movimento di propagazione del magnetismo attraverso la massa del ferro.

Ma di queste cose mi basta aver fatto cenno, poichè, come ho già avvertito, io non intendo entrare ora come suol dirsi nel merito del soggetto.

33 Le esperienze vanno distinte naturalmente in due classi secondo che si tratta della chiusura o dell'apertura della spirale magnetizzante. Per ciascuna classe io ne ho fatte varie serie, fra le quali mi limi-

terò a riferirne una, raccogliendo al solito i risultati in un prospetto. Incomincerò dalle esperienze di chiusura.

In queste le variazioni del magnetismo e lo sviluppo di forza elettromotrice indotta procedono con lentezza, tanto che la prima ipotesi del num. precedente si può ritenere prossimamente verificata. Le forze elettromotrici in tutto il corso del fenomeno erano alquanto deboli; onde si usò sempre la misura differenziale, avendo un elemento Bunsen col polo negativo unito al piatto B e il positivo alla terra. La deviazione X, corrispondente così alla forza elettromotrice nulla, la quale si osservava sperimentando nello stesso modo delle altre volte, salvo che era aperta la pila che forniva la corrente all'elettrocalamita, era sensibilmente costante ed uguale a 10, 5. La sirena rendeva la sua nota ordinaria di 512 vibrazioni semplici al secondo. La corrente magnetizzante era fornita da una coppia Bunsen, che si teneva chiusa solo il tempo necessario per le esperienze.

La colonna I del prospetto seguente contiene i numeri delle vibrazioni comprese fra le due interruzioni. In questi non si può garantire l'esattezza della seconda cifra decimale. Le altre colonne contengono come nei precedenti prospetti le deviazioni dell'elettrometro e la loro traduzione in misure di forza elettromotrice.

PROSPETTO VIII

Forza elettrom. indotta per la magnetizzazione del ferro.

		I vibrazioni	II x_1	III y_1	IV $Y-y_1$	V E (D=100)
Misura differenziale (X=10,5 : Y=19,5)	1	0,40	33,40	42 40	22,90	52,00
»	2	0,60	33,60	42 60	23,10	52,43
»	3	0,75	32,30	41 30	21,80	49,48
»	4	1,20	31,30	40 30	20,80	47,21
»	5	2,95	26,35	35 35	15,85	35,98
»	6	2,15	28,10	37 10	17,60	39,95
»	7	1,90	29,15	38 15	18,65	42,34
»	8	3,10	26,70	35 70	16,20	36,77
»	9	4,20	23,90	32 90	13,40	30,42
»	10	2,80	26,55	35 55	16,05	36,43
»	11	4,70	22,90	31 90	12,40	28,15
»	12	7,00	19,90	28 90	9,40	21,34
»	13	5,90	21,50	30 50	11,00	24,97
»	14	3,50	25,45	34 45	14,95	33,94
»	15	6,50	20,50	29 50	10,00	22,70
»	16	6,00	21,25	30 25	10,75	24,40
»	17	7,30	19,30	28 30	8,80	19,98
»	18	8,80	18,10	27 10	7,60	17,25
»	19	9,20	17,45	26 45	6,95	15,78
»	20	8,20	18,50	27 50	8,00	18,16
»	21	9,50	16,95	25 95	6,45	14,54
»	22	11,50	15,95	24 95	5,45	12,37
»	23	12,50	15,40	24 40	4,90	11,12
»	24	18,30	12,95	21 95	2,45	5,55
»	25	14,70	14,30	23 30	3,80	8,62
»	26	14,00	14,40	23 40	3,90	8,85
»	27	21,00	12,25	21 25	1,75	3,97
»	28	22,80	11,95	20 95	1,45	3,29
»	29	16,00	13,65	22 65	3,15	7,15
»	30	20,00	12,60	21 60	2,10	4,76
»	31	23,20	11,90	20 90	1,40	3,18
»	32	22,40	12,15	21 15	1,65	3,75
»	33	24,50	11,75	20 75	1,25	2,83

Osservando l'andamento dei numeri E dell'ultima colonna, si vede che essi procedono prossimamente secondo una funzione esponenziale dei tempi (intervalli fra le due interruzioni rappresentati dai numeri della colonna I) della forma $K\alpha^{-\alpha}$. Prendendo in questa $K=55$,

$a = 10$, $C = 0{,}06$; e ponendovi successivamente per t i numeri della colonna I, i numeri così calcolati non differiscono molto da quelli dell'ultima colonna.

Assai meglio però che con una sola esponenziale l'andamento dei numeri E può essere rappresentato per la somma di due esponenziali della forma $K\alpha^{-\alpha}+K_1\alpha^{-\alpha_1 t}$; dove scegliendo convenientemente i valori delle costanti si trova piena corrispondenza, come si può vedere dalla rappresentazione grafica che ne ho data nella Tav. II. Quivi si è disegnata la curva II coll'equazione

$$(1) \qquad y=37 \,.\, 10^{-0{,}087\,.\,x} + 18 \,.\, 10^{-0.018\,.\,x},$$

mentre che per mezzo di punti vi sono indicati i risultati del prospetto, portando sulle ascisse x i numeri della colonna I e sulle ordinate quelli della V; avvertendo che (per comodo del disegno e per agevolare il confronto colle esperienze di apertura che riferirò in appresso) i numeri della ascisse vi appariscono moltiplicati per 2, con che l'unità di misura viene a corrispondere prossimamente al millesimo di secondo, e quelli delle ordinate divisi per 4; e poichè la lunghezza delle ascisse superava così i limiti della tavola, si è ripiegata la figura all'indietro.

Si vede che nei limiti delle irregolarità dovute agli errori dell'esperienza la posizione dei punti corrisponde benissimo colla curva. Le irregolarità sono qui assai sensibili, e ben più gravi che nelle precedenti misure sull'induzione per moto relativo. Ma qui si hanno altresì maggiori cause di errore. Un leggero spostamento non avvertito della posizione delle interruzioni, che aveva in quelle poca influenza, altera qui subito i risultati: vi è inoltre l'effetto della scintilla che, lasciando anche l'incertezza cui dà luogo intorno al valore vero dei tempi, altera le superficie metalliche al punto d'interruzione, onde viene diminuita la bontà del contatto, che non è facile di ristabilire sempre

allo stesso modo, ed accresciuta la corrente derivata che a interruzione chiusa percorre l'elettrocalamita. Veramente si sarebbe potuto, mettendoci più cura e più tempo, diminuire tali errori; ma ricordi il lettore che questo ch'io presento non è che un saggio di applicazione dell'apparecchio elettrometrico. Del resto anche così gli errori non sono molto maggiori di quello che lo sieno ordinariamente in simili ricerche, nè tali che l'andamento del fenomeno non apparisca chiaramente.

34. Nel caso dell'apertura della corrente primaria ossia della smagnetizzazione, il fenomeno procede con assai più rapidità, e la forza elettromotrice indotta varia celeremente entro limiti molto estesi. A cagione di questa rapidità di variazione vi è incertezza sull'applicabilità della 1.ª ipotesi del num. 32, stando ai dati riferiti sul tempo che impiega il condensatore a caricarsi. Ad ogni modo darò senz'altro il prospetto dei risultati.

Per misurare la forza elettromotrice nelle sue varie fasi dovette far uso sì del modo diretto che differenziale, con un solo condensatore e con ambedue, e servirmi perciò del coefficiente R di riduzione (num. 18) il quale determinato qui di nuovo direttamente, si trovò uguale a 4,05. Parimente fu determinata la correzione δ per la carica interna (num. 20) da farsi ai numeri ottenuti con misure dirette, e si trovò $\delta = 0,20$ per il condensatore A, e $\delta = 0,25$ per i due condensatori riuniti. La corrente primaria era data da una coppia Bunsen, e si teneva chiusa solo quanto era necessario per le esperienze. La nota della sirena era sempre di 512 vibrazioni al secondo.

Il prospetto ha la stessa disposizione del precedente, salvo che qui le indicazioni per le deviazioni dell'elettrometro e la loro traduzione in misure di forza elettromotrice si riferiscono a più modi di misura. Ad intenderle più facilmente gioveranno le osservazioni seguenti.

In tutte le esperienze l'estremità della spirale in-

dotta che comunica col condensatore è la positiva. La 1.ª esperienza è fatta col solo condensatore A e con misura differenziale, ma con questa differenza dalle esperienze anteriori che qui la carica fissa Y è negativa, e si agguinge in meno nel piatto A alla carica da misurarsi, la quale senza ciò sarebbe troppo forte e produrrebbe una deviazione superiore ai limiti della scala. A tal oggetto il piatto B era riunito al polo positivo di una coppia Bunsen, invece che al negativo come d'ordinario, e si aveva così senz'altro una deviazione X = 10 , 2, cioè una carica fissa Y = —19 , 20. Onde alla carica che con questo modo di esperienza corrisponde alla deviazione osservata, si deve aggiungere il numero 19 . 2 per avere la vera carica corrispondente alla forza elettromotrice con cui si esperimenta.

Le esperienze dalla 2.ª fino alla 22.ª sono fatte col condensatore A e con misura diretta. In queste la carica corrispondente alla deviazione osservata va diminuita della quantità δ=0,20 per la correzione della carica interna.

Le esperienze dalla 23.ª fino alla 36.ª sono fatte allo stesso modo ma con ambedue i condensatori, e le cariche vanno diminuite di 0,25.

Finalmente le ultime quattro esperienze sono con due condensatori e con misura differenziale secondo il modo ordinario. Il piatto B era riunito al polo negativo di un elemento Bunsen, e si aveva senz'altro la deviazione X=10,50, ossia una carica fissa Y=+19,50.

Nelle esperienze fatte con un solo condensatore, per riportarle alla stessa misura di quelle con due, le cariche debbono essere moltiplicate pel coefficiente di riduzione, che qui era 4,05: onde i numeri E dell'ultima colonna, che per le esperienze dalla 23.ª in giù sono dedotti da quelli della colonna precedente moltiplicando per

il fattore 2,27, per le prime 22 invece sono dedotte moltiplicando per 2,27×4,05=9,19.

PROSPETTO IX.

Forza elettromotrice indotta per la smagnetizzazione del ferro.

		I vibrazioni	II x_1	III y_1	IV	V E (D=100)
					$y_1+19.20$	
Cond. A. Mis. differenziale (X = 10. 2; Y = — 19. 2)	1	0. 30	21. 75	30. 75	49. 95	459. 04
					$y_1-0.20$	
Cond. A. Misura diretta	2	0. 35	31. 05	40. 05	39. 85	366. 22
»	3	0. 40	27. 65	36. 65	36. 45	334. 96
»	4	0. 55	17. 00	26. 00	25. 80	237. 10
»	5	0. 45	24. 65	33. 65	33. 45	307. 40
»	6	0. 65	11. 20	20. 20	20. 00	183. 80
»	7	0. 45	25. 50	34. 50	34. 30	315. 21
»	8	0. 90	4. 25	12. 15	11. 95	109. 82
»	9	0. 80	6. 95	15. 65	15. 45	142. 08
»	10	0. 80	6. 30	14. 85	14. 65	134. 63
»	11	0. 55	17. 60	26. 60	26. 40	242. 61
»	12	0. 60	15. 75	24. 75	24. 55	225. 61
»	13	0. 50	21. 00	30. 00	29. 80	273. 86
»	14	0. 60	15. 35	24. 35	24. 15	221. 93
»	15	0. 50	22. 05	31. 05	30. 85	283. 51
»	16	0. 60	14. 05	23. 05	22. 85	209. 99
»	17	0. 85	6. 70	15. 35	15. 15	139. 23
»	18	0. 65	11. 55	20. 55	20. 35	187. 01
»	19	0. 80	7. 55	16. 35	16. 15	148. 41
»	20	0. 75	9. 15	18. 10	17. 90	164. 50
»	21	0. 90	5. 10	13. 35	13. 15	120. 84
»	22	1. 00	3. 75	11. 40	11. 20	102. 92
					$y_1-0.25$	
Cond. A+A'. Mis. diretta	23	1. 30	22. 30	31. 30	31. 00	70. 48
»	24	1. 10	27. 35	36. 30	36. 10	81. 94
»	25	1. 35	15. 75	24. 70	24. 50	00. 61
»	26	2. 00	4. 20	12. 00	11. 80	26. 78
»	27	1. 55	11. 05	20. 00	19. 80	44. 94
»	28	1. 75	8. 35	17. 25	17. 00	38. 59
»	29	2. 40	2. 15	8. 80	8. 00	19. 41
»	30	2. 35	2. 30	9. 10	8. 80	20 09
»	31	2. 30	2. 60	9. 60	9. 30	21. 22
»	32	1. 60	10. 95	19. 90	19. 70	44. 72
»	33	2. 00	4. 55	12. 60	12. 30	28. 03
»	34	2. 20	3. 00	11. 10	10. 90	24. 74
»	35	1. 50	12. 00	21. 00	21. 30	48. 35
»	36	1. 95	5. 30	13. 60	13. 30	30. 30
					y_1-Y	
Cond A+A'. Mis. differenz. (X = 10. 5; Y=+ 19. 5)	37	3. 00	15. 75	24. 70	5. 25	11. 92
»	38	2. 50	17. 70	26. 70	7. 25	16. 46
»	39	3. 85	13. 10	22. 10	2. 65	6. 06
»	40	3. 50	14. 10	23. 10	3. 60	8. 17

Confrontando i numeri di questo prospetto con quelli del precedente, si trova una grandissima diversità di andamento. Ivi le forze elettromotrici, piccole già dal primo, van digradando lentamente, mentre qui da un valore relativamente grandissimo che hanno in principio, scendono rapidamente fino a diventare in breve piccolissime.

Quanto poi alla legge di queste variazioni, si vede che non può essere più rappresentata da una sola esponenziale nemmeno alla lontana; ma lo può essere ancora dalla somma di due esponenziali, con coefficienti però ben diversi da quelli che valevano pel caso della chiusura. La curva III sulla tavola II è stata disegnata secondo l'equazione

$$(2) \qquad y = 885.10^{-1.38} + 141,10^{-0.86}$$

e come precedentemente si sono indicati per via di punti i risultati dell'ultimo prospetto: i numeri delle ascisse appariscono sulla figura raddoppiati, e quelli delle ordinate divisi per 20. Così l'unità di misura per le ascisse, ossia pei tempi, è la stessa per le due curve, e corrisponde pressapoco al millesimo di secondo; e per le ordinate o forze elettromotrici è diversa (si è dovuto far così non per esagerare le proporzioni delle curve), e le ordinate della curva III per essere confrontabili con quelle della curva II van moltiplicate per 5.

Si vede che la posizione dei punti corrisponde colla curva dentro i limiti delle irregolarità che i resultati presentano. Le quali sebbene sieno gravi, pure non possono dirsi tali avuto riguardo alla natura delle esperienze. La figura dimostra infatti che la massima parte di esse è inferiore all'errore che porterebbe lo sbaglio di un mezzo decimo di vibrazione ossia di $\frac{1}{10000}$ di secondo nei tempi. Ora tralasciando anche l'effetto della scintilla e le altre

cause di errore, vi è sempre questo, che per quanta cura io vi mettessi, non posso esser certo dell'esattezza nella valutazione delle frazioni di vibrazione al di là del decimo.

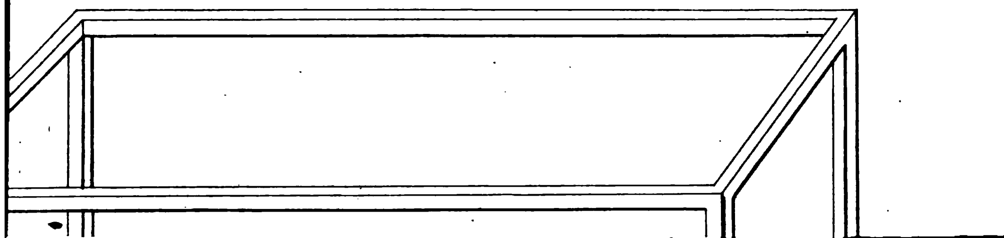
Nei limiti prescritti dall'applicabilità delle ipotesi del n. 32 e dalle incertezze sperimentali le equazioni (1) e (2) esprimono la legge della magnetizzazione e della smagnetizzazione del nucleo di ferro; e ad ogni modo, anche se debbano riguardarsi come approssimative, servono a rappresentare con evidenza l'andamento generale del fenomeno, ed a mettere in rilievo la grande differenza che vi è nei due casi.

Del resto io non entro ora in alcuna discussione di questi risultati, nè di ciò che sarebbe a farsi volendo venire a determinazioni più precise, avendo inteso solamente con queste e con le altre esperienze che ho riferito di dare un esempio dell'uso che può farsi del mio apparecchio elettrometrico.

Pisa 30 Novembre 1874.

Tav. I.

Fig. II.





SUL TEOREMA
DI ADDIZIONE DELLE FUNZIONI ABELIANE

TESI

DEL DOTT. ALBERTO TONELLI

Il Sig. Weber in una memoria inserita nel giornale di Crelle (vol. LXX pag. 193) intitolata «*Ueber das Additionstheorem der Abelschen Functionen*» ha risoluto il problema dell' addizione delle funzioni Abeliane.

Supponendo date le quantità $v_1, v_2, \ldots v_p, w_1, w_2, \ldots, w_p$ e per mezzo di queste determinati i punti $x_1, x_2, \ldots x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$ colle relazioni

$$v_h = \int_{c_1}^{x_1} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{x_p} du_h$$

$$w_h = \int_{c_1}^{y_1} du_h + \int_{c_2}^{y_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{y_p} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots p,$$

ha determinato i punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ per i quali si ha,

$$v_h + w_h = \int_{c_1}^{z_1} du_h + \int_{c_2}^{z_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{z_p} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots p,$$

costruendo una funzione ζ monodroma dei punti della superficie T di Riemann, che ammetta p infinitesimi di primo ordine nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$; oppure, considerando il problema sotto un punto di vista più generale come suol farsi anche nella inversione, determinando i coefficienti di una equazione

$$(3) \qquad \psi(\sigma) = \sigma^{p} + M_1 \sigma^{p-1} + M_2 \sigma^{p-2} + \ldots + M_p = 0$$

la quale ha per radici i p valori che la funzione nota σ diramata come T assume nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Seguendo il metodo tenuto dal Sig. Weber io ho cercato di generalizzare la soluzione del medesimo problema considerando un numero qualunque r di sistemi v_h: così facendo, dal teorema dell'addizione io passo a quello della moltiplicazione supponendo uguali fra loro i sistemi $v_h^{(i)}$.

Ho determinato la funzione ζ che ammette gl'infinitesimi nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ che voglionsi determinare, come pure i coefficienti della equazione (3) che ha per radici i valori $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p}$, ed ho cercato di esprimere i risultati per mezzo delle funzioni $\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ (che ho designato col simbolo $\vartheta((u_h))$ analogo all'altro $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}(u_h)\right)$ adoprato da Riemann) con argomenti dipendenti dalle v_h, il che facendo, nel calcolo compariscono anche le derivate delle medesime funzioni sulle quali sarebbe molto utile uno studio speciale per determinarne le proprietà e per iscoprire se sia possibile la eliminazione delle medesime dai risultati finali.

I.

Sieno dati gli r sistemi

$$(4)\begin{cases} v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots\dots v_p^{(1)} \\ v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots\dots v_p^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \dots\dots v_p^{(r)} \end{cases}$$

e mediante le relazioni

$$(5)\quad v_h^{(i)} = \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} du_h + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} du_h + \dots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} du_h$$

$$h=1, 2, \dots, p$$
$$i=1, 2, \dots, r$$

colla inversione, determinati gli r sistemi di punti

$$(6)\begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots\dots x_p^{(1)}, \\ x_1^{(2)} x_2^{(2)}, \dots\dots x_p^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots\dots x_p^{(r)}; \end{cases}$$

mi propongo di determinare per mezzo delle quantità note (4) , (6) i p punti $z_1, z_2, \dots, z_p$ per i quali si ha

$$(7)\quad w_h = \sum_1^r {}_i v_h^{(i)} = \int_{c_1}^{z_1} du_h + \int_{c_2}^{z_2} du_h + \dots + \int_{c_p}^{z_p} du_h$$

$$h=1, 2, \dots, p$$

Nella (7) elimino colle (5) le $v^{(i)}$ ed ottengo

$$\sum_{1}^{r}\left\{\int_{c_1}^{x_1^{(i)}} du_h+\int_{c_2}^{x_2^{(i)}} du_h+\ldots+\int_{c_p}^{x_p^{(i)}} du_h\right\}=\int_{c_1}^{z_1} du_h+\int_{c_2}^{z_2} du_h+\ldots+\int_{c_p}^{z_p} du_h$$

ovvero

$$\sum_{2}^{(r)}{}_i\left\{\int_{x_1^{(i)}}^{c_1} du_h+\int_{x_2^{(i)}}^{c_2} du_h+\ldots+\int_{x_p^{(i)}}^{c_p} du_h\right\}+\int_{x_1^{(1)}}^{z_1} du_h+\int_{x_2^{(1)}}^{z_2} du_h+\ldots+\int_{x_p^{(1)}}^{z_p} du_h=0$$

Da questa relazione deduco che esiste una funzione ζ, la quale, diviene infinita nei punti (6) e infinitesima nei punti che formano i limiti superiori degli integrali della (8). Ora è noto che determinando una funzione ζ diramata come T che divenga infinita di primo ordine in rp punti, per esempio, negli rp punti (6), essa conterrà $rp-p+1$ costanti arbitrarie, le quali potranno sempre essere determinate in modo che la medesima funzione ζ acquisti $rp-p=p(r-1)$ infinitesimi arbitrari. Se io determino queste costanti in modo che la funzione ζ divenga infinitesima di ordine $r-1$ nei p punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$, essa dovrà pure acquistare gl'infinitesimi $z_1, z_2 \ldots, z_p$ di primo ordine, e così avremo determinata la funzione che si cercava.

Sarà facile dimostrare che la funzione ζ non contiene irrazionalità rispetto alle quantità $z_{x_i^{(l)}} s_{x_i^{(l)}}$ corrispondenti ai punti (6).

Infatti è noto che una funzione diramata come T, la quale diviene infinita di primo ordine nei punti (6), se questi in generale sono differenti fra loro, può porsi sotto la forma

$$(a)\quad \zeta = a_0 + a_1^{(1)} t_{x_1^{(1)}} + a_2^{(1)} t_{x_2^{(1)}} + \dots + a_p^{(1)} t_{x_p^{(1)}} +$$
$$+ a_1^{(2)} t_{x_1^{(2)}} + a_2^{(2)} t_{x_2^{(2)}} + \dots + a_p^{(2)} t_{x_p^{(2)}} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ a_1^{(r)} t_{x_1^{(r)}} + a_2^{(r)} t_{x_2^{(r)}} + \dots + a_p^{(r)} t_{x_p^{(r)}} =$$
$$= a_0 + \sum_1^r{}_l \sum_1^p{}_i \, a_i^{(l)} t_{x_i^{(l)}}$$

essendo $t_{x_i^{(l)}}$ l'integrale di seconda specie che diviene infinito nel punto $x_i^{(l)}$. Supponendo che quelli integrali di seconda specie sieno *normali* avranno uguali a zero i moduli di periodicità relativi alle sezioni a_ν, ed alle sezioni b_ν li avranno uguali a $-2\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_i^{(l)}}}$

Ciò posto la nostra funzione ζ resta invariata attraversando le sezioni a_ν, e perchè avvenga lo stesso relativamente alle sezioni b_μ basterà che i coefficienti $a_i^{(l)}$ sodisfino le condizioni

$$-2\left\{ a_1^{(1)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_1^{(1)}}} + a_2^{(1)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_2^{(1)}}} + \dots + a_p^{(1)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_p^{(1)}}} + \right.$$
$$+ a_1^{(2)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_1^{(2)}}} + a_2^{(2)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_2^{(2)}}} + \dots + a_p^{(2)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_p^{(2)}}} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left. + a_1^{(r)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_1^{(r)}}} + a_2^{(r)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_2^{(r)}}} + \dots + a_p^{(r)}\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_p^{(r)}}} \right\} = 0$$

ovvero

$$(b) \qquad \sum_{1}^{p}{}_{i} \sum_{1}^{r}{}_{l} a_i^{(l)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z\, x_i^{(l)}} = 0$$

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots, p;$$

e le equazioni lineari (b) determinano p coefficienti $a_i^{(l)}$ razionalmente per mezzo delle quantità

$$\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z\, x_i^{(l)}},$$

le quali sono razionali in $z_i^{(l)}$ ed $s_i^{(l)}$. Così la funzione (a) contiene dei coefficienti razionali rispetto agli elementi dei punti (6), e quando anche si vengono a determinare gli altri coefficienti colla condizione che la funzione assuma gl'infinitesimi $c_1\, c_2 \ldots c_p$ di ordine $r - 1$, è evidente che resta sempre razionale rispetto alle quantità considerate.

II.

Visto così come possa determinarsi la funzione ζ, cerchiamo di costruire l'equazione (3) la quale ha per radici i p valori che la funzione σ diramata come T, assume nei punti $z_1, z_2 \ldots z_p$.

Supponiamo che la funzione σ divenga infinita di primo ordine in μ punti $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$; allora assumerà un valore qualunque in μ punti della superficie di cui è funzione monodroma, e quindi la funzione ζ considerata come funzione di σ sarà a μ valori.

Chiamiamo $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \ldots, \zeta^{(\mu)}$ i μ rami di ζ rispetto a σ, il prodotto

$$\zeta^{(1)} . \zeta^{(2)} \ldots . \zeta^{(\mu)}$$

sara una funzione monodroma, e quindi razionale di σ, che diviene infinita di primo ordine solamente negli rp punti (6), infinitesima di ordine $r-1$ nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$, e di primo ordine nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Per questo l'espressione

$$\frac{\overset{(1)}{\zeta}\cdot\overset{(2)}{\zeta}\ldots\overset{(\mu)}{\zeta}\prod_1^r\left(\sigma-\sigma_{x_1^{(l)}}\right)\left(\sigma-\sigma_{x_2^{(l)}}\right)\ldots\left(\sigma-\sigma_{x_p^{(l)}}\right)}{\psi(\sigma)\left\{\left(\sigma-\sigma_{c_1}\right)\left(\sigma-\sigma_{c_2}\right)\ldots\left(\sigma-\sigma_{c_p}\right)\right\}^{r-1}}$$

razionale in σ, non diviene nè infinita nè infinitesima per alcun valore di σ, e non potrà differire da una costante, e ponendo per amor di brevità

$$\left(\sigma-\sigma_{a_1}\right)\left(\sigma-\sigma_{a_2}\right)\ldots\ldots\left(\sigma-\sigma_{a_p}\right)=\psi^{(a)}(\sigma)$$

avremo

$$C\frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}=\overset{(1)}{\zeta}\cdot\overset{(2)}{\zeta}\ldots\overset{(\mu)}{\zeta}\prod_1^r\frac{\psi^{(x^l)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}.$$

Accennando con $\overset{(1)}{\zeta}_\infty, \overset{(2)}{\zeta}_\infty, \ldots, \overset{(\mu)}{\zeta}_\infty$ i valori di $\overset{(1)}{\zeta}, \overset{(2)}{\zeta}, \ldots, \overset{(\mu)}{\zeta}$ per $\sigma=\infty$ avremo

$$C=\overset{(1)}{\zeta}_\infty\cdot\overset{(2)}{\zeta}_\infty\cdot\ldots\overset{(\mu)}{\zeta}_\infty$$

e quindi

$$(9)\qquad \frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}=\frac{\overset{(1)}{\zeta}\cdot\overset{(2)}{\zeta}\ldots\ldots\overset{(\mu)}{\zeta}}{\overset{(1)}{\zeta}_\infty\cdot\overset{(2)}{\zeta}_\infty\cdot\ldots\overset{(\mu)}{\zeta}_\infty}\prod_1^r\frac{\psi^{(x^l)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$$

Ponendo in questa formula p valori differenti di σ

successivamente, otteniamo p equazioni lineari rispetto ai coefficienti della (3) le quali servono a determinarli completamente in modo che la equazione

$$\sigma^p + M_1 \sigma^{p-1} + M_2 \sigma^{p-2} + \ldots + M_p = 0$$

ammetta per radici i valori $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p}$ che la funzione σ assume nei punti $z_1, z_2, \ldots z_p$.

III.

Introduciamo nelle formule le funzioni

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots u_p)$$

con argomenti dipendenti dai sistemi $v_h^{(i)}$.

Innanzi tutto osservo che il quoziente

$$\frac{\psi^{(x^l)}(\sigma)}{\psi^{(0)}(\sigma)}$$

si esprime immediatamente per le funzioni ϑ.

Infatti applicando il teorema di Abel agl' integrali di terza specie servendoci della funzione σ diramata come T, che assume un valore qualunque nei punti $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p$ e il valore ∞ nei punti $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_p$ si ha

$$\sum_1^{\mu} \int_{\eta_i}^{\xi_i} d\pi(c_\rho, x_\rho) = \log \frac{\sigma - \sigma_{x_\rho}}{\sigma - \sigma_{c_\rho}}$$

da cui, facendo percorrere a ρ i valori $1, 2, \ldots, p$

$$\sum_1^{\mu}\int_{\eta_i}^{\xi_i}\sum_{1}^{p}{}_{\rho}\, d\pi(c_\rho\, x_\rho)=\sum_1^{p}{}_{\rho}\int_{c_\rho}^{x_{\rho_\mu}}\sum_1{}_i\, d\pi\,(\eta_i,\xi_i) = \log\frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$$

e ricordando la formula

$$\sum_1^{p}{}_{\rho}\int_{c_\rho}^{x_\rho} d\pi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\log C\,\frac{\vartheta\left(\left(u_h-\sum_1^{\varepsilon_2}\sum^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h-\sum_1^{\varepsilon_1}\sum^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)},$$

si deduce

$$\frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}=\prod_1^{\mu}{}_i\, C\,\frac{\vartheta\left(\left(u_h-\sum_1^{\xi_i}\sum^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h-\sum_1^{\eta_i}\sum^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)}$$

e facendo coincidere le x colle c

$$C=\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}+k_h\right)\right)}$$

onde finalmente

$$\frac{\psi^{(x_l)}(\sigma)}{\psi^{(0)}(\sigma)}=\prod_1^{\mu}{}_i\,\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}-v_h^{(l)}+k_h\right)\right).\,\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}-v_h^{(l)}+k_h\right)\right).\,\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}+k_h\right)\right)}.$$

Per esprimere la funzione ζ per mezzo delle funzioni ϑ osservo che

$$\vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(l)} + k_h\right)\right)$$
$$\vartheta\left(\left(u_h + k_h\right)\right)$$
$$\vartheta\left(\left(u_h - w_h + k_h\right)\right),$$

quando le k_h sieno convenientemente scelte, divengono infinitesime di primo ordine respettivamente nei punti

$$x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_p^{(l)}$$
$$c_1, c_2, \ldots, c_p$$
$$z_1, z_2, \ldots, z_p$$

sicchè la funzione

$$(10) \qquad \frac{\vartheta\left(\left(u_h - \sum_1^r v_h^{(i)} + k_h\right)\right) \vartheta\left(\left(u_h + k_h\right)\right)^{r-1}}{\prod_1^r{}_i\, \vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(i)} + k_h\right)\right)}$$

non potrà differire da ζ altro che per un fattor costante.

Però la forma (10) per la ζ non si presta per la soluzione del problema di addizione comparendovi nell'argomento di una funzione ϑ la w_h, mentre il problema deve risolversi con espressioni contenenti le v_h separatamente e le $x_i^{(l)}$.

Osservando peraltro che la funzione ζ, quando è stata sottoposta alle condizioni di ammettere gl'infiniti (6) di primo ordine, contiene ancora $pr - p + 1$ costanti arbitrarie le quali debbono determinarsi in modo che essa acquisti gl'infinitesimi $c_1, c_2, \ldots, c_p$ di ordine $r-1$, e quindi può esprimersi linearmente per mezzo di $p(r-1)$ altre funzioni ζ_s^t le quali sodisfino la condizione di avere esse o la loro somma gl'infiniti di ζ, potremo porre

$$(11) \qquad \zeta = a_0{}^0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{p}{}_l \, a_l^{(i)} \, \zeta_l^{(i)} \, .$$

Determiniamo ora la forma delle $\zeta_l^{(i)}$ le quali dovendo divenire infinite nei punti (6) avranno per denominatore

$$\prod_1^r \vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(s)} + k_h\right)\right);$$

e se prendiamo per numeratore

$$\prod_1^r \vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(s)} g_h + {}^{(s)} + k_h\right)\right)$$

saranno date dalla espressione

$$(12) \qquad \zeta_l^{(i)} = \frac{\prod_1^r \vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(s)} + g_{h,l}^{(s)(i)} + k_h\right)\right)}{\prod_1^r s \, \vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(s)} + k_h\right)\right)}$$

dove le $g_{h,l}^{(s)(i)}$ dovranno essere determinate in modo che le $\zeta_l^{(i)}$ sieno diramate come T, e che almeno la loro somma divenga infinita nei punti (6)

Vediamo quali condizioni debbono essere sodisfatte dalle g.

Prescindendo per semplicità dagli indici i , l i quali rimangono i medesimi per ogni funzione $\zeta_l^{(i)}$, e ricordando che ad ogni sezione b_μ le funzioni

$$\vartheta\,(v_1 \, , v_2 \, . \, . \, . \, , v_p)$$

acquistano il fattore

$$e^{-2v_\mu - a_{\mu\mu}} \, ,$$

essendo $a_{s,t}$ il modulo di periodicità dell'integrale Abeliano di prima specie u_s alla sezione b_t, vedremo che la funzione (12) acquista alla sezione b_μ il fattore

$$e^{-2\sum_1^{(r)} g_\mu^{(s)}} = e^{-2\left(g_\mu^{(1)} + g_\mu^{(2)} + \ldots + g_\mu^{(r)}\right)};$$

e se la $\zeta_l^{(i)}$ deve avere le diramazioni di T le g dovranno sodisfare la condizione

$$(13) \qquad g_\mu^{(1)} + g_\mu^{(2)} + \ldots + g_\mu^{(r)} = k_\mu' \pi i$$

dove k'_μ rappresenta un numero intero qualunque.

Resta a vedersi ora se è possibile determinare $p(r-1)$ sistemi di valori per le g che sodisfino le relazioni (13) e che nello stesso tempo ci forniscano per mezzo della (12) altrettante funzioni $\zeta_l^{(i)}$ tutte differenti fra loro e tali che almeno la loro somma divenga infinita nei punti (6).

Le relazioni (13) si traducono nelle congruenze

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} g_1^{(1)} + g_1^{(2)} + \ldots + g_1^{(r)} \equiv 0 \\ g_2^{(1)} + g_2^{(2)} + \ldots + g_2^{(r)} \equiv 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_p^{(1)} + g_p^{(2)} + \ldots + g_p^{(r)} \equiv 0 \end{array} \right\} (\mathrm{mod}\ \pi i)$$

e si vede che le g situate sulla medesima colonna compariscono tutte in una funzione ϑ, e quindi essendo tutte eguali a zero la funzione ϑ cui appartengono coinciderebbe colla sua corrispondente del denominatore, e la $\zeta_l^{(i)}$ corrispondente non diventerebbe infinita nei p punti in cui diveniva infinitesima questa funzione. Ciò però non impedisce che la nostra funzione ζ divenga infinita in tutti quanti i punti (6) quando, almeno in una delle $\zeta_l^{(i)}$, comparisca ognuna delle

$$\vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(l)} + k_h\right)\right)$$

al denominatore.

Non ostante queste limitazioni resta ancora tanta arbitrarietà nelle g da permetterci di costruire non solo uno, ma più sistemi di $p(r-1)$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$.

Incominciamo dall'osservare che le quantità

$$\frac{\pi i}{r}, \frac{2\pi i}{r}, \frac{3\pi i}{r}, \ldots, \frac{(r-1)\pi i}{r}$$

sono tali che ripetute r volte danno una quantità congrua zero, modulo πi, onde ponendo

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{llll} g_1^{(1)} = 0, & g_1^{(2)} = 0, & \ldots, & g_1^{(r)} = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{\mu-1}^{(1)} = 0, & g_{\mu-1}^{(2)} = 0, & \ldots, & g_{\mu-1}^{(r)} = 0 \\ g_{\mu}^{(1)} = \frac{k\pi i}{r}, & g_{\mu}^{(2)} = \frac{k\pi i}{r}, & \ldots, & g_{\mu}^{(r)} = \frac{k\pi i}{r} \\ g_{\mu+1}^{(1)} = 0, & g_{\mu+1}^{(2)} = 0, & \ldots, & g_{\mu+1}^{(r)} = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_p^{(1)} = 0, & g_p^{(2)} = 0, & \ldots, & g_p^{(r)} = 0 \end{array}\right.$$

questo sistema sodisfarà le (14) e tutte le altre condizioni cui debbono sodisfare le g, ed ognuna delle funzioni $\zeta_l^{(i)}$ diverrà con questo sistema infinita in tutti i punti (6).

Se nella (15) facciamo variare k da uno fino a $r-1$ otterremo $r-1$ sistemi differenti di g cui corrisponderanno altrettanti sistemi di funzioni $\zeta_l^{(i)}$ pure differenti non potendosi aver mai

$$\frac{k\pi i}{r} - \frac{k'\pi i}{r} = k''\pi i;$$

inoltre osservando che due funzioni ϑ della forma

$$\vartheta(v_1, v_2 .. v_h + g .. v_p) , \vartheta(v_1, v_2, .., v_h, .., v_h' + g, .., v_p)$$

ammettono infinitesimi differenti, se alla linea delle g che hanno il valore $\frac{k\pi i}{r}$ facciamo percorrere tutte le p posizioni, per ogni valore di k otteniamo p sistemi differenti di g, e quindi in tutto ne otterremo

$$p(r-1)$$

appunto quanti ne sono necessari per la costruzione della nostra funzione ζ.

Ciò premesso, se accenniamo con

$$\vartheta_{\mu}^{(k)}((v_h)) = \vartheta_{\mu}^{(k)}(v_1, v_2 \ldots v_p)$$

la funzione

$$\vartheta\left(v_1, v_2, \ldots, v_\mu + \frac{k\pi i}{r}, \ldots v_p\right)$$

avremo

$$\zeta_l^{(i)} = \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

da cui finalmente per mezzo della (11)

$$(16) \quad \zeta = a_0^0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{p}{}_l a_l^{(i)} \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}.$$

Questa espressione della funzione ζ diventa precisamente

quella data dal sig. Weber nella memoria citata quando si supponga $r=2$.

Infatti la formula del sig. Weber è

$$(17) \qquad \zeta = a_0 + \sum_1^p a_s \frac{\vartheta_s((u_h - v_h^{(1)} + k_h))\vartheta_s((u_h - v_h^{(2)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(1)} + k_h))\vartheta((u_h - v_h^{(2)} + k_h))}.$$

essendo

$$\vartheta_s(v_1, v_2 \dots v_p) = \vartheta(v_1, v_2, \dots, v_s + \frac{\pi i}{2}, \dots v_p),$$

e se nella (16) facciamo $r=2$ sparisce naturalmente la somma relativa all'indice i, e il prodotto si riduce a due sole funzioni ϑ che coincidono con quelle che compariscono nella (17).

IV.

In questo modo il problema è teoricamente risoluto.

Però nella funzione ζ sopra determinata le funzioni ϑ, che vi compariscono contengono negli argomenti frazioni del modulo di periodicità πi i cui denominatori sono r e perciò non sono di quelle ϑ che si designano col simbolo

$$\vartheta \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2' \dots, \varepsilon_p' \end{Bmatrix} ((v_h))$$

le quali contengono negli argomenti solo le metà dei moduli di periodicità degli integrali Abeliani di prima specie.

Sarà utile vedere se è possibile introdurre negli argomenti delle funzioni ϑ che determinano le $\zeta_i^{(l)}$ solamente le metà dei moduli di periodicità e per maggior semplicità le metà dei moduli di periodicità πi.

Vediamo prima se ciò è possibile poi passeremo alla effettiva determinazione.

Ricordando che basta divenga infinita in ognuno dei punti (6) la somma delle $\zeta_i^{(l)}$, osservo che se considero nella (14) una linea per esempio la s esima e in questa faccio tutte le combinazioni a due a due dando alle g di ciascuna combinazione il valore $\frac{\pi i}{2}$, ottengo

$$\frac{r(r-1)}{2}$$

sistemi differenti di g cui corrispondono altrettante funzioni $\zeta_i^{(l)}$ differenti, e se questo lo ripeto per tutte le p linee successivamente ne ottengo

$$\frac{r}{2}(r-1)\,p \geqq (r-1)\,p$$

che mi serviranno certamente alla formazione della funzione ζ.

Evidentemente fra le $\zeta_i^{(l)}$ che in questo modo si costruiscono ve ne sono certamente di quelle che divengono infinite in un sistema qualunque

$$x_1^{(i)}\ ,\ x_2^{(i)}\ ,\ .\ .\ .\ ,\ x_p^{(i)}$$

dei punti (6), e quindi la loro somma diviene certamente infinita in ognuno dei punti (6).

Dimostrata la possibilità determiniamo effettivamente queste funzioni $\zeta_i^{(l)}$.

Per far questo consideriamo una linea per esempio la l esima ed in questa prendiamo una g per esempio la m esima cui do costantemente il valore $\frac{\pi i}{2}$ mentre successivamente assegno

il medesimo valore alla 1.ª, 2.ª, m—1esima, $m+1$esima,.., $r$esima; in questo modo ottengo $r-1$ sistemi di g, e ripetendo questo per tutte le linee ne vengo ad ottenere appunto

$$p(r-1)$$

cui corrisponderanno altrettante $\zeta_l^{(i)}$ delle quali p divengono infinite in un sistema qualunque di punti

$$x_1^{(i)}\ ,\ x_2^{(i)}\ ,\ .\ .\ .\ ,\ x_p^{(i)},$$

e, se m è costante, ognuna diviene infinita nel sistema

$$x_1^{(m)}\ ,\ x_2^{(m)}\ ,\ .\ .\ .\ ,\ x_p^{(m)}.$$

Indichiamo con

$$\vartheta_l(v_1\ ,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ v_p)=\vartheta_l((v_h))$$

la funzione

$$\vartheta(v_1\ ,\ v_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ v_l+\frac{\pi i}{2}\ ,\ .\ .\ .\ ,\ v_p)$$

ed avremo

$$(18)\qquad \zeta_l^{(i)}=\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\vartheta_l((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}$$

e quindi

$$(19)\qquad \zeta=a_0^0+\sum_{1}^{r-1}{}_i\sum_{1}^{p}{}_l a_l^{(i)}\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\vartheta_l((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\vartheta((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}$$

nella quale le funzioni ϑ contengono negli argomenti solamente le metà dei moduli πi di periodicità.

Le funzioni $\zeta_i^{(l)}$ che compariscono nella (19) non divengono infinite di primo ordine altro che in due dei sistemi

$$x_1^{(t)}\,,\ x_2^{(t)}\,,\ \ldots\,,\ x_p^{(t)};$$

non è difficile però costruire una funzione ζ col mezzo di $\zeta_i^{(l)}$ che divengano infinite in ognuno dei punti (6) prendendo per le g solo le metà dei moduli di periodicità πi.

Per questo distingueremo prima i casi di r pari e di r dispari.

Se r è pari mentre nella linea $l$esima do alle g quei valori adottati nel caso precedente, in un altra qualunque $l+n$ esima do a tutte le g il valore $\frac{\pi i}{2}$; tenendo fisso n, che supporrò primo con p e minor di p, e facendo percorrere ad l tutta la serie dei valori $1\,,\,2\,,\,.\,.\,,\,p$ ottengo

$$p(r-1)$$

funzioni $\zeta_i^{(l)}$ differenti che divengono infinite in ognuno dei punti (6).

Se r è dispari invece nella linea $l+n$ esima non potendo dare a tutte le g il valore $\frac{\pi i}{2}$ lo darò ad $r-1$ escludendo per esempio la $m$esima perchè questa nella linea $l$esima son sicuro che ha sempre il valore $\frac{\pi i}{2}$.

Per $l+n$ intendo il più piccolo numero che sodisfa la congruenza

$$l+n \equiv x \pmod p.$$

Ciò posto avremo per r pari

$$(20)\quad \zeta_l^{(i)}=\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}\cdot \prod_{1}^{r}{}_s\frac{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}$$

per r dispari

$$(20')\quad \zeta_l^{(i)}=\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}\cdot \prod_{1}^{r}{}_s\frac{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}$$

onde nel primo caso

$$(21)\quad \zeta=a^0{}_0+\sum_{1}^{r-1}{}_i\sum_{1}^{p}{}_l a_l^{(i)}\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}\cdot \prod_{1}^{r}{}_s\frac{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}=$$

$$=a_0{}^0+\sum_{1}^{p}{}_l\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))}\prod_{1}^{r}{}_s\frac{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}\cdot \sum_{1}^{r-1}{}_i\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}\,a_l^{(i)}$$

e nel secondo

$$(21')\zeta = a^0{}_0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{p} a_l^{(i)} \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))} \cdot \prod_1^{r}{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

$$= a_0^0 + \sum_1^{p}{}_l \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(m)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))} \prod_1^{r}{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} \cdot \sum_1^{r-1} \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))} a_l^{(i)}$$

Da queste forme della funzione ζ si ricava facilmente, come era da prevedersi, l'espressione (19) col sostituire respettivamente le funzioni ϑ_l, ϑ alle $\vartheta_{l,l+n}$ e ϑ_{l+n}.

Del resto poi tanto alla (19) quanto alle (21) (21') possiamo dare un' altra forma introducendo appunto le funzioni

$$\vartheta \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix} ((u_h)).$$

Essendo

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} H_1 = \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{11} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{12} + \ldots + \frac{\varepsilon_p}{2}a_{1p} \\ H_2 = \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{21} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{22} + \ldots + \frac{\varepsilon_p}{2}a_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_p = \frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{p1} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{p2} + \ldots + \frac{\varepsilon_p}{2}a_{pp} \end{array} \right.$$

si ha

$$\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots \varepsilon'_p\end{Bmatrix}((v_h)) = e^{\Sigma_h \varepsilon_h v_h}\, \vartheta((v_h + \mathrm{H}_h))$$

dove le quantità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'$, rappresentano o zero o uno; per cui ove i punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$ (*) sieno tali che le k_h corrispondenti vengano espresse per mezzo di metà dei moduli di periodicità sotto la forma (a) avendosi

$$\vartheta((u_h - v_h + k_h)) = e^{-\Sigma_h \varepsilon_h (u_h - v_h)}\, \vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h))$$

sarà pure

$$\vartheta_{s,t}((u_h - v_h + k_h)) = e^{-\Sigma_h \varepsilon_h (u_h - v_h)}\, \vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s, \ldots, \varepsilon_t, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_s + 1, \ldots, \varepsilon'_t + 1, \ldots, \varepsilon'_p\end{Bmatrix}((u_h - v_h))$$

e quindi le (19), (21), (21') diverranno respettivamente:

$$\zeta = a_0{}^0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{p} a_l^{(i)} \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l' + 1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(m)}))\; \vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l' + 1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(i)}))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(m)}))\; \vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h))}$$

(*) Vedasi la memoria del signor WEBER intitolata «*Zur Theorie der Umkehrung der Abelschen Integrale*» nel Volume LXX del giornale di Crelle pag, 314 paragrafo 7.

$$\zeta = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_l+1, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(m)}))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h))} \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon'_p\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(s)}))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h))} .$$

$$. \sum_1^{r-1} \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(i)}))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(i)}))} a_l^{(i)}$$

$$\zeta = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon'_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_l+1, \ldots, \varepsilon_p\end{Bmatrix}((u_h - v_h))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h))} \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(s)}))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(s)}))} .$$

$$. \sum_1^{r-1} {}_i \frac{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_l+1 \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h^{(i)}))}{\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{Bmatrix}((u_h - v_h))} a_l^{(i)}$$

Nelle formule (19) (21) (21') la ζ è espressa per funzioni $\zeta_l^{(i)}$ le quali dipendono dall'indice i che si riferisce ai diversi sistemi delle v, per cui quando questi sistemi sieno differenti, quelle sono veramente $p(r-1)$; ma quando per esempio quei sistemi si riducessero tutti uguali fra loro

come è nel caso della moltiplicazione, allora il numero delle $\zeta_l^{(i)}$ differenti fra loro si riduce semplicemente a p, e quindi nè la (19), nè la (21), nè la (21') possono servire per la risoluzione del problema della moltiplicazione.

Bisognerà dunque vedere se è possibile costruire $p(r-1)$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$ differenti, e che tali rimangano anche quando i sistemi v coincidano.

Distinguo al solito il caso di r pari dal caso di r dispari, ed osservo che nel primo dando alle g della linea l esima a 2, a 4, a r il valore $\frac{\pi i}{2}$ vengo ad ottenere $\frac{r}{2}$ sistemi differenti di g cui mi corrisponderanno altrettante funzioni $\zeta_l^{(i)}$, e se il medesimo faccio nella linea $l+n$ contemporaneamente, ne ottengo altrettante, e quindi in tutto r, e facendo percorrere ad l la serie dei valori $1, 2, \ldots, p$ ne ottengo pr, e quindi posso fra queste prenderne

$$p(r-1)$$

le quali mi serviranno alla costruzione della funzione ζ.

Evidentemente in questo modo le funzioni $\zeta_l^{(i)}$ non dipendono dagli indici dei sistemi $v^{(i)}$.

Nel caso di r dispari dando a 2, 4, . . . $r-1$ delle g della linea $l$esima il valore $\frac{\pi i}{2}$ otteniamo $\frac{r-1}{2}$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$ e se la stessa operazione la eseguiamo anche sulle g della linea $l+n$esima contemporaneamente otterremo $r-1$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$ e dando ad l i valori $1, 2, \ldots, p$ ne otterremo appunto

$$p(r-1).$$

Nel caso di r pari sarà

$$\zeta_l^{(i)}=\prod_1^{2i}{}_s\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}$$

e quando i vària da 1 ad $\frac{r}{2}$ otteniamo le prime $\frac{r}{2}$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$; per avere le altre $\frac{r}{2}-1$ basterà prendere

$$\zeta_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)}=\prod_1^{2i}\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}$$

dove i varia da 1 ad $\frac{r}{2}-1$. Quando l prende i valori $1, 2, \ldots, p$ otterremo $p(r-1)$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$, per cui sarà

$$(22)\quad \zeta=a_0^0+\sum_1^p{}_l\left\{\sum_1^{\frac{r}{2}}a_l^{(i)}\prod_1^{2i}{}_s\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}+\right.$$
$$\left.+\sum_1^{\frac{r}{2}-1}{}_i\,a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)}\prod_1^{2i}{}_s\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}\right\}.$$

Se r è dispari

$$\zeta_l^{(i)}=\prod_1^{2i}{}_s\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}$$

dove i va da 1 ad $\frac{r-1}{2}$, e per avere le altre $\frac{r-1}{2}$ basterà prendere

$$\zeta_l = \frac{\left(\frac{r-1}{2}+i\right)\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\ \vartheta_l((u_h-v_h^{(t)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\ \vartheta((u_h-v_h^{(t)}+k_h))} \cdot$$

$$\cdot \prod_{1}^{2i-1}{}_s \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}$$

dove l' indice m che si suppone fisso corrisponde all' indice di quella g che resta zero nella linea l esima quando alle altre $r-1$ si dà il valore $\frac{\pi i}{2}$; per cui

$$(22')\ \zeta = a_0^0 + \sum_{1}^{p}{}_l \left\{ \sum_{1}^{\frac{r-1}{2}} a_l^{(i)} \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))} + \right.$$

$$+ \sum_{1}^{\frac{r-1}{2}}{}_i a_l^{\left(\frac{r-1}{2}+i\right)} \frac{\vartheta_{l+n}((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\vartheta_l((u_h-v_h^{(t)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\ \vartheta((u_h-v_h^{(t)}+k_h))} \cdot$$

$$\left. \cdot \prod_{1}^{2i-1}{}_s \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h-v_h^{(s)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(s)}+k_h))} \right\}$$

Quando n sia primo con p io dico che dando ad l tutti i valori $1, 2, \ldots, p$ non si ricade mai in un sistema di g già considerato perchè le due congruenze

$$\left.\begin{array}{l} l+n \equiv x \\ x+n \equiv l \end{array}\right\} \pmod{p}$$

conducendo all' altra

$$2n \equiv o \pmod{p}$$

sono impossibili contemporaneamente a meno che non sia $p=1$ o $p=2$.

Considerando il caso particolare di $n=1$ si vede subito che esclusi i valori 1, 2 di p si ottengono p sistemi differenti di g facendo assumere ad l tutti i valori $1, 2, \ldots, p$. Anche dalla espressione (22) di ζ si ritorna facilmente alla formola del signor Weber supponendo

$$r=2.$$

Le formule (22) (22') non sono applicabili quando sia

$$p=1 \text{ o } p=2,$$

per cui bisognerà trattare questi due casi in un modo speciale onde ottenere la funzione ζ espressa per mezzo di funzioni

$$\vartheta \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix} ((v_h))$$

e tale che possa servire anche pel problema della moltiplicazione.

Osservo intanto che le formule (16) (19) (21) (21') sono giuste anche per questi casi, essendo nelle (21) (21') $n=0$ per $p=1$. Incominciamo dal caso più semplice e cioè da quello che corrisponde a

$$p=1;$$

la congruenza

$$g_1+g_2+\ldots+g_r \equiv 0 \ (\bmod.\ \pi i)$$

rappresenta la (14), e quando alle g si dia a due a quattro . . . a r o ad $r-1$ il valore $\frac{\pi i}{2}$ otteniamo semplicemente $\frac{r}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$ sistemi di g (che non coincidono con $(r-1)$ altro che nel caso speciale di $r=2$) per cui dovremo far uso anche dei moduli di periodicità relativi alle sezioni b_ν.

Ciò posto se r è pari oltre considerare i sistemi delle g che si ottengono dando a due, a quattro, a $2\,l$ (l fino ad $\frac{r}{2}$) il valore $\frac{\pi i}{2}$, terremo conto anche dei sistemi che si ottengono dando successivamente a due, quattro . . $2\,l$ (l fino ad $\frac{r}{2}$) il valore $\frac{\pi i}{2} \pm \frac{a_{11}}{2}$ in modo che ad l corrisponda il segno superiore ed alle altre l il segno inferiore. Così otterremmo r sistemi differenti, e possiamo escluderne uno a piacere onde adoperarne $r-1$ come a noi abbisognano.

Ciò posto le prime $\frac{r}{2}$ funzioni $\zeta^{(s)}$ avranno la forma

$$\zeta^{(i)} = \prod_{1}^{2i} \frac{\vartheta\left(u-(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2})+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)}$$

andando i da 1 ad $\frac{r}{2}$, e le altre $r-1$ avranno la forma

$$\zeta^{(\frac{r}{2}+i)} = \prod_{1}^{i} \frac{\vartheta\left(u-(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2})+k\right)\vartheta\left(u-(v^{(s')}+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2})+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)\,\vartheta(u-v^{(s')}+k)}$$

dove i va da uno fino ad $\frac{r}{2}-1$; cosicchè avremo per r pari

$$(23)\quad \zeta = a_0 + \sum_{1}^{\frac{r}{2}} a_i \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)} +$$

$$+\sum_{1}^{\frac{r}{2}-1} a_{\frac{r}{2}+i} \prod_{1}^{i} \frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)\vartheta\left(u-\left(v^{(s')}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)\,\vartheta(u-v^{(s')}+k)}$$

Quando r è dispari allora fissato per una g il valore $\frac{a_{11}}{2}$ potremo ad un' altra dare il valore $\frac{\pi i}{2}$, e ad un'altra perciò il valore $\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2}$, e a due, a quattro . . . a $2l$ (l fino ad $\frac{r-3}{2}$) il valore $\frac{\pi i}{2}\pm\frac{a_{11}}{2}$, dove per l si prende il segno superiore, e per le altre l l'inferiore, così otteniamo $\frac{r-1}{2}$ sistemi cui corsispondono altrettante $\zeta^{(s)}$, e se poi diamo a due, a quattro, a $2l$ (l fino ad $\frac{r-1}{2}$) delle g il valore $\frac{\pi i}{2}$ solamente, otteniamo altre $\frac{r-1}{2}$ funzioni $\zeta^{(s)}$ che hanno la forma

$$\zeta^{(s)} = \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)}$$

dove i va da uno fino ad $\frac{r-1}{2}$, mentre le altre $\frac{r-1}{2}$ hanno la forma

$$\zeta^{\left(\frac{r-1}{2}+1+i\right)} = \frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2}\right)+k\right)\vartheta\left(u-\left(v^{(s')}+\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)\vartheta\left(u-\left(v^{(s'')}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)\vartheta(u-v^{(s')}+k)\vartheta(u-v^{(s'')}+k)}$$

$$\times\prod_{0}^{i} \frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(l)}+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)\vartheta\left(u-\left(v^{(l')}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(l)}+k)\vartheta(u-v^{(l')}+k)}$$

dove i va da zero ad $\frac{r-3}{2}$; per cui

$$(23')\ \zeta=a_0+\sum_{1}^{\frac{r-1}{2}}a_i\prod_{1}^{2i}\frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(\iota)}+\frac{\pi i}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(\iota)}+k)}+$$

$$+\sum_{0}^{\frac{r-3}{2}}a_{\left(\frac{r-1}{2}+1+i\right)}\frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(\iota)}+\frac{\pi i}{2}\right)+k\right)\vartheta\left(u-\left(v^{(\iota')}+\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(\iota)}+k)\,\vartheta(u-v^{(\iota')}+k)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(\iota'')}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(\iota'')}+k)}\times$$

$$\times\prod_{0}^{i}\frac{\vartheta\left(u-\left(v^{(l)}+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)\vartheta\left(u-\left(v^{(l')}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2}\right)+k\right)}{\vartheta(u-v^{(l)}+k)\,\vartheta(u-v^{(l')}+k)}$$

Per il caso di $p=2$ si può in una linea delle g ripetere quello che si è fatto pel caso di $p=1$, come pure si potrebbe procedere in altro modo, il che tralascio di fare per brevità contentandomi di aver fatto vedere come la soluzione sia possibile anche in questi casi speciali per mezzo di funzioni $\zeta^{(\iota)}$ che non dipendono dagl' indici dei sistemi $v_h^{(i)}$.

V.

Per considerare il problema della moltiplicazione, supponiamo che i sistemi delle v coincidano; allora la (7) diviene

$$(24)\qquad w_h=rv_h=\int_{c_1}^{z'_1}du_h+\int_{c_2}^{z'_2}du_h+\ldots+\int_{c_p}^{z'_p}du_h$$

$$h=1\,,2\,,\ldots,p$$

mentre la (5) si riduce semplicemente a

$$(25)\quad v_h=\int_{c_1}^{x_1} du_h+\int_{c_2}^{x_2} du_h+\ldots+\int_{c_p}^{x_p} du_h$$

$$h=1\,,2\,,\ldots,p$$

Per determinare i punti $z'_1\,,z'_2\,,\ldots,z'_p$ seguendo il solito metodo elimino fra la (24) e la (25) le v_h ed ottengo:

$$\int_{x_1}^{z_1'} du_h+\int_{x_2}^{z_2'} du_h+\ldots+\int_{x_p}^{z_p'} du_h+$$

$$(r-1)\left\{\int_{x_1}^{c_1} du_h+\int_{x_2}^{c_2} du_h+\ldots+\int_{x_p}^{c_p} du_h\right\}=o$$

la qual formula si deduceva immediatamente, come è naturale, dalla (8) sol che vi si supponessero i sistemi delle $x_i^{(l)}$ uguali fra loro.

Determinando adunque una funzione ζ' la quale divenga infinita di ordine r nei p punti $x_1, x_2, .., x_p$ e infinitesima di ordine $r-1$ nei p punti $c_1\,,\,c_2\,,\ldots,\,c_p$ essa diverrà infinitesima di primo ordine anche nei punti

$$z'_1\,,\,z'_2\,,\ldots,\,z'_p\,.$$

La forma della funzione ζ' sappiamo che sarà la seguente

$$\zeta'=a^0{}_0+\sum_1^r{}_s\sum_1^p{}_l\,\frac{d^{s-1}t_{x_l}}{d^{s-1}z_{x_l}}\,a_l^{(s)}$$

dove p dei $pr+1$ coefficienti arbitrari debbono determinarsi in modo che la funzione ζ' abbia le diramazioni di T, ed è chiaro che con questa determinazione non si introducono irrazionalità rispetto alle $z_{x_l} s_{x_l}$; le altre $p(r-1)+1$ debbono determinarsi in modo che la ζ' ammetta gl'infinitesimi $c_1, c_2, \ldots, c_p$ di ordine $r-1$.

Per determinare i coefficienti dell'equazione

$$(26) \qquad \psi(\sigma)=\sigma^p+A_1\sigma^{p-1}+\ldots+A_p=0$$

che ha per radici i p valori che la funzione σ prende nei punti $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ osservo che la (9) diventa

$$\frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(e)}(\sigma)}=\frac{\zeta'_1\ldots\zeta'_2\ldots\ldots\zeta'_\mu}{\zeta'\infty_1 . \zeta'\infty_2\ldots\zeta'\infty_\mu}\left\{\frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(e)}(\sigma)}\right\}^r .$$

donde, al solito, dando a σ p valori differenti si ottengono altrettante equazioni che ci servono a determinare i coefficienti della (26).

Per introdurre nel calcolo le funzioni ϑ osservo prima di tutto che si ha

$$\frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(e)}(\sigma)}=\frac{\zeta_1'\ldots\zeta_2'\ldots\ldots\zeta_p'}{\zeta'\infty_1, \zeta'\infty_2, \ldots, \zeta'\infty_\mu} .$$

$$.\prod_1^\mu\left\{\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}-v_h+k_h\right)\right)\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}-v_h+k_h\right)\right)\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}+k_h\right)\right)}\right\}^r$$

Inoltre ponendo

$$\zeta=a^0_0+\sum_l^p\sum_i^{r-1}a_l^{(i)}\zeta_l^{(i)'}$$

essendo le funzioni $\zeta_l^{(i)'}$ diramate come T, e tali che almeno

la loro somma divenga infinita di ordine r nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_p$, e quindi deducendosi dalle $\xi_l^{(i)}$ ponendo in queste uguali i sistemi delle v, cioè

$$v_\mu^{(1)} = v_\mu^{(2)} = \ldots = v_\mu^{(r)} = v_\mu$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, p.$$

avremo, considerando primieramente la forma (16) della funzione ζ

$$(27) \quad \zeta' = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \sum_1^{r-1} {}_i\, a_l^{(i)} \left\{ \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^r$$

riducendosi evidentemente, coll' ipotesi fatta, le funzioni

$$\zeta_l^{(i)} = \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

alla forma

$$\zeta_l^{(i)\prime} = \left\{ \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))} \right\}^r .$$

Se volessimo ora la soluzione del medesimo problema per mezzo di funzioni ϑ che contenessero semplicemente le metà dei moduli di periodicità πi non potremmo servirci delle formule (19) (21) (21') ma bensì delle (22) (22').

Infatti da queste si ha

$$\zeta' = a^0{}_0 + \sum_1^p {}_l \left\{ \sum_1^{\frac{r}{2}} {}_i\, a_l^{(i)} \left(\frac{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right)^{2i} + \right.$$
$$\left. + \sum_1^{\frac{r}{2}-1} {}_i\, a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \left(\frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right)^{2i} \right\}$$

se r è pari, e

$$\zeta' = a_0{}^0 + \sum_1^p {}_l \left\{ \sum_1^{\frac{r-1}{2}} a_l{}^{(i)} \left\{ \frac{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^{2i} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{\frac{r-1}{2}} a_l^{\left(\frac{r-1}{2}+i\right)} \left\{ \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\} \left\{ \frac{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^{2i-1} \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}$$

se r è dispari; e introducendo le funzioni

$$\vartheta \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \ldots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \ldots, & \varepsilon'_p \end{Bmatrix}$$

se le quantità k_h si esprimono per mezzo di metà dei moduli di periodicità

$$\zeta' = a^0{}_0 + \sum_1^p {}_l \left(\sum_1^{\frac{r}{2}} a_l{}^{(i)} \frac{\vartheta^{2i}((u_h - v_h)) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l' + 1, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}}{\vartheta^{2i}((u_h - v_h)) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}} \right.$$

$$\left. \cdot + \sum_1^{\frac{r}{2}-1} {}_i a_l{}^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \frac{\vartheta^{2i}((u_h - v_h)) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_l + 1, \ldots, \varepsilon'_{l+n} + 1, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}}{\vartheta^{2i}((u_h - v_h)) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p' \end{Bmatrix}} \right)$$

e

$$\zeta' = a^0{}_0 + \sum_1^p{}_l \left\{ \sum_1^{\frac{r-1}{2}} a_l^{(i)} \frac{\vartheta^{2i}((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}}{\vartheta^{2i}((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}} + \right.$$

$$\sum_1^{\frac{r}{2}-1}{}_i a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \frac{\vartheta^{2i-1}((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_l+1, \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon'_p\end{matrix}\right\}}{\vartheta^{2i-1}((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}} \cdot$$

$$\left. \frac{\vartheta((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\} \vartheta((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}}{\vartheta^2((u_h - v_h))\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p\end{matrix}\right\}} \right\}$$

In tutte le espressioni che si sono date per la funzione ζ che serve per le soluzioni dei problemi di addizione e moltiplicazione i coefficienti arbitrari debbono determinarsi in modo che la funzione acquisti gl'infinitesimi $c_1, c_2, \ldots, c_p$ di ordine $r-1$.

È appunto facendo questa determinazione che si introducono nel calcolo le derivate delle funzioni ϑ, sulle quali uno studio speciale sarebbe molto utile specialmente allo scopo di vedere se sia possibile la loro eliminazione dai risultati finali.

VI.

Le formule stabilite fin qui ci servono per la soluzione dei due problemi di addizione e di moltiplicazione estesi

anche alle funzioni Abeliane di seconda e terza specie.

Vediamo prima di tutto come si enunciano questi problemi seguendo sempre la generalizzazione degli studi del signor Weber esposti nella memoria sopra citata.

Sieno i punti (6) determinati per mezzo delle quantità (4) mediante le (5) col teorema di inversione, e consideriamo le due somme

$$(28) \qquad \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} dt(\varepsilon) + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} dt(\varepsilon) + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} dt(\varepsilon)$$

$$(28') \qquad \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)$$

essendo le vie d'integrazione in queste espressioni le medesime che nelle formule (5); queste somme dipendono dalle

$$x_1^{(i)}, \; x_2^{(i)}, \; \ldots, \; x_p^{(i)}$$

conseguentemente dalle

$$v_1^{(i)}, \; v_2^{(i)}, \; \ldots, \; v_p^{(i)}$$

e potremo indicarle con

$$Z_\varepsilon(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_p^{(i)}) = Z_\varepsilon((v_h^{(i)}))$$

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_p^{(i)}) = P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}((v_h^{(i)}));$$

e se ricordiamo che i punti

$$z_1, \; z_2, \; \ldots, \; z_p$$

corrispondono alle quantità

$$\sum_1^r v_1^{(i)}, \; \sum_1^r v_2^{(i)}, \; \ldots, \sum_1^r v_p^{(i)}$$

avremo

$$(29)\quad Z_\varepsilon\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{c_1}^{z_1} dt(\varepsilon)+\int_{c_2}^{z_2} dt(\varepsilon)+\ldots+\int_{c_p}^{z_p} dt(\varepsilon)$$

$$(29')\quad P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{c_1}^{z_1} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\int_{c_2}^{z_2} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\ldots+\int_{c_p}^{z_p} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)$$

e il problema consiste nel determinare le (29) (29′) in funzione delle (28) (28′) respettivamente, e delle quantità note $v_h^{(i)}$.

La funzione ζ determinata ci dà il modo di risolvere immediatamente il problema: infatti se dalla (29) si sottraggono tutti i sistemi che si ottengono dalla (28), quando ad i si diano successivamente tutti i valori $1, 2, \ldots, r$, otterremo

$$Z_\varepsilon\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)-\sum_1^r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{x_1^{(1)}}^{z_1} dt(\varepsilon)+\int_{x_2^{(1)}}^{z_2} dt(\varepsilon)+\ldots+\int_{x_p^{(1)}}^{z_p} dt(\varepsilon)+$$
$$+\sum_2^r{}_i\left\{\int_{x_1^{(i)}}^{c_1} dt(\varepsilon)+\int_{x_2^{(i)}}^{c_2} dt(\varepsilon)+\ldots+\int_{x_p^{(i)}}^{c_p} dt(\varepsilon)\right\}$$

e analogamente dalle (29′) e (28′)

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)-\sum_1^r P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{x_1^{(1)}}^{z_1} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\int_{x_2^{(1)}}^{z_2} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)++\int_{x_p^{(1)}}^{z_p} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)$$
$$+\sum_2^r{}_i\left\{\int_{x_1^{(i)}}^{c_1} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\int_{x_2^{(i)}}^{c_2} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\ldots+\int_{x_p^{(i)}}^{c_p} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)\right\}.$$

Ora la funzione ζ diramata come T diviene infinita di primo ordine nei punti $x_l^{(i)}$, infinitesima di primo ordine

nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$, infinitesima di ordine $r-1$ nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$; per cui pel teorema di Abel avremo osservando che

$$\frac{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}}{\zeta_{x_l}^{(i)}-\zeta_\varepsilon}\,,\quad l\,\frac{\zeta_{x_l}^{(i)}-\zeta_{\varepsilon_1}}{\zeta_{x_l}^{(i)}-\zeta_{\varepsilon_2}}$$

sono zero,

$$(30)\quad Z_\varepsilon\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\sum_1^r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)-\frac{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}}{\zeta_\varepsilon}$$

$$=\sum_1^r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)-\left(\frac{dl\zeta}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}$$

$$(30')\quad P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\sum_1^r P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)+l\,\frac{\zeta_{\varepsilon_1}}{\zeta_{\varepsilon_2}}\,;$$

le quali formule risolvono il problema.

Da queste si passa facilmente a quelle che danno la risoluzione del problema della moltiplicazione supponendo i sistemi delle v tutti uguali fra loro; allora si ottiene:

$$(31)\quad Z_\varepsilon\left(\left(r\,v_h^{(i)}\right)\right)=r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)-\left(\frac{d\,l\zeta'}{dz}\right)_{z=z\varepsilon}$$

$$(31')\quad P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(r\,v_h^{(i)}\right)\right)=r\,P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)+l\,\frac{\zeta'_{\varepsilon_1}}{\zeta'_{\varepsilon_2}}$$

dove ζ' è la funzione sopra determinata per la risoluzione del medesimo problema relativo alle trascendenti di prima specie.

Le formule (30) (30') (31) (31') valgono anche per integrali di seconda e terza specie qualunque, e non è punto necessario supporre che sieno integrali normali.

Pisa, Luglio 1873

ALBERTO TONELLI.

ERRATA CORRIGE

Pag. 2 linea 5 invece di ζ, η, ς leggi ξ, η, ς

» 6 » 6 risalendo » teorema » teorema)

» 9 » 15 » di curvatura. » di curvatura principale

» 9 » 3 » $\psi(u+vdu^2$ » $\psi(u+v)dv^2$

» 10 » 8 ris. » sono i rispettivi » sono i raggi rispettivi

» 12 formola (α) » $2=$ » $z=$

» 14 la formola (δ) va scritta in questo modo:

$$\frac{dz}{dr}=\frac{\sqrt{a^2+2k^2}}{a\left(r^2-\frac{1}{k^2}\right)}\sqrt{\frac{2}{k^2(a^2+2k^2)}-\left(r^2-\frac{1}{k^2}\right)^2}$$

» 14 1.ª formola invece di $(-k^2r^4)^2$ leggi $(1-k^2r^2)^2$

» 16 linea 10 » ω » θ

» 17 » 3 ris. » $\cos h\frac{z}{m}$ » $\cos h\frac{r}{m}$

» 18 » 17 » alissoide » alisseide

» 22 » 2 ris. » alissoide » alisseide

» 23 l' ultima formola va scritta così:

$$z=m\log\left\{mr+\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}\right\}+\frac{a^2}{2m}\log\left\{1-\frac{2a^2m}{r[mr+\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}]+m(a^2-m^2)}\right\}$$

» 24 linea 9 invece di colla moulures leggi colle moulures

» 26 » 8 » $z=a\varphi\cot i$ » $z=a\,\varphi\cot i$

» — » 18 » X^3+Y^2 » X^2+Y^2

» 27 » 3 » $\frac{dX}{d\varphi}$(al numeratore) » $\frac{dZ}{d\varphi}$

» 27 » 12 » (15) ne deduce » (15) se ne deduce

» 28 » 9 » del ridursi » dal ridursi

» — » 19 » in sistema » un sistema

» — » 4 ris » con qualunque » in qualunque

» 29 2.ª formola (19) invece di $\frac{1}{\rho^2 u}$ leggi $\frac{1}{\rho^2 u}$

» 31 linea 7 invece di $\int V,dv$ leggi $\int V_1dv$

» 33 » 6 » ρu » ρu

» 36 2.ª formola (27) invece di $V G$ leggi $\sqrt{G}$

» 42 linea 9 invece di alle sostituzioni » colle sostituzioni

» — » 14 » $Y=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-U'^2}\operatorname{sen} nnv$ » $Y=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-U'^2}\operatorname{sen} n\,v$

» 50 formola (11) invece di $\sqrt{a^2 1}$ (nel denominatore) leggi $\sqrt{a^2+1}$

» 51 linea 4 » h (nel denominatore) » k

» 53 formola (44) » C''(nel denominatore della 3ª) » C'

SUGL' INTEGRALI

COMUNI

A PIÙ PROBLEMI DI DINAMICA

TESI

DEL

DOTT. GIO. PENNACCHIETTI

È noto che nella Dinamica si presentano delle classi di problemi per i quali si possono immediatamente assegnare degl' integrali pel solo fatto che le forze applicate ai vari punti del sistema soddisfano ad alcune condizioni analitiche. Gl' integrali comuni a tutti i problemi che appartengono ad una data classe possono o contenere la espressione analitica delle forze (come l'integrale delle forze vive) oppure essere da questa indipendenti (come gl' integrali delle aree). Il Bertrand ha risoluto il problema [1]: Determinare gl'integrali indipendenti dalla espressione analitica delle forze che possono essere comuni a più problemi relativi al

[1] Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique (Liouville t. XVII, 1852)—Il metodo del Bertrand è stato applicato anche dal Rouché nella sua Memoria « Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique relatifs au mouvement d'un point sur une surface » (Liouville, 2.ª serie, t. III, 1858) — Si può ancora vedere la Memoria del Bertrand « Sur quelques-unes des formes les plus simples. que puissent présenter les intégrales des équations differentielles du mouvement d'un point matériel » (Liouville, 2.ª serie, t. II, 1857).

moto d'un punto, quando le forze sono funzioni soltanto delle coordinate, e stabilire le condizioni cui debbono soddisfare le forze stesse, affinchè i corrispondenti problemi ammettano quegl' integrali.

Il metodo tenuto dal Bertrand nella risoluzione di questo problema consiste essenzialmente in ciò, che, potendosi, stante la arbitrarietà dei valori iniziali delle coordinate e delle velocità, dedurre da una equazione che effettivamente sia un integrale del moto, quattro equazioni (una delle quali però necessariamente conseguenza delle altre) fra le tre componenti della forza, si può in generale, dato che sia un integrale di un movimento, dedurre da esso le espressioni delle forze che generano quel moto. Può per altro accadere che quelle quattro equazioni si riducano anzichè a tre indipendenti a due od anche ad una, ed allora quella equazione integrale proposta potrà appartenere a tutti quei problemi nei quali le componenti delle forze soddisfano alle due relazioni od alla relazione cui le quattro equazioni si riducono.

Il Korkine (1) ha ripreso il problema del Bertrand togliendo la restrizione che le forze siano funzioni soltanto delle coordinate ed ammettendo invece che esse possano essere funzioni anche delle componenti della velocità, ma si è limitato a ricercare i sistemi di due integrali comuni a più problemi del moto di un punto sopra una superficie. Se non che in tal caso il metodo del Bertrand non conduce più ad equazioni finite fra X, Y, Z, ma ad equazioni che oltre a queste quantità contengono le loro derivate rapporto ad x', y', z'; talchè il Korkine ha dovuto tenere una via diversa, fondandosi sul noto teorema del Clebsch: Un sistema iacobiano o completo di μ equazioni a derivate parziali

(1) Sur les intégrales des équations d'un point matériel. (Mathem. Annalen Leipzig 1870).

del primo ordine lineari ed omogenee con n variabili ammette $n-\mu$ soluzioni.

Seguendo la via tenuta dal Korkine determino da prima (§. I.) la forma che debbono avere quattro equazioni indipendenti dal tempo, affinchè possano essere integrali comuni a più problemi relativi al moto di un punto nello spazio, quando le forze dipendono dalle coordinate e dalle componenti della velocità del punto; dopo, studiando il movimento di un punto soggetto a forze funzioni soltanto delle coordinate, trovo dei risultati in parte non contenuti nella memoria del Bertrand.

I.

Sistemi di quattro integrali comuni indipendenti dal tempo.

Se un integrale:

$$\alpha = F(x, y, z, x', y', z', t)$$

delle equazioni differenziali del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}=Y\ ,\ \frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

è comune ai due problemi (X, Y, Z) e (X_1, Y_1, Z_1), dovranno essere verificate le due equazioni che se ne deducono derivando la equazione integrale rapporto al tempo, e sostituendovi per $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ una volta X, Y, Z ed un' altra X_1, Y_1, Z_1, cioè le due equazioni:

$$\frac{dF}{dx}x'+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dz}z'+\frac{dF}{dx}X+\frac{dF}{dy'}Y+\frac{dF}{dz'}Z+\frac{dF}{dt}=0,$$

$$\frac{dF}{dx}x'+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dz}z'+\frac{dF}{dx'}X_1+\frac{dF}{dy'}Y_1+\frac{dF}{dz'}Z_1+\frac{dF}{dt}=0.$$

Ora delle componenti $X , Y , Z : X_1 , Y_1 , Z_1$ almeno due corrispondenti possono supporsi diverse fra loro; siano queste X , X_1. Ponendo:

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{Y-Y_1}{X-X_1} , \; k'=\frac{Z-Z_1}{X-X_1} \dots\dots\dots \\ l=Y-kX=Y_1-kX_1=\frac{Y_1X-X_1Y}{X-X_1} \dots \\ l'=Z-k'X=Z_1-k'X_1=\frac{Z_1X-X_1Z}{X-X_1} \dots \end{array}\right\} \dots (1)$$

le due ultime equazioni prenderanno la forma:

$$A(F)=\frac{dF}{dx'}+\frac{dF}{dy'}k+\frac{dF}{dz'}k'=o \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$B(F)=\frac{dF}{dx}x'+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dz}z'+\frac{dF}{dy'}l+\frac{dF}{dz'}l'+\frac{dF}{dt}=o, \quad (3)$$

e la equazione ottenuta da queste coll'uguagliare a zero la funzione alternata B (A (F)) — A (B (F)) sarà:

$$(B,A)=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}k+\frac{dF}{dz}k'+\frac{dF}{dy'}\left\{A(l)-B(k)\right\}+ \\ +\frac{dF}{dz'}\left\{A(l')-B(k')\right\}=o \dots\dots\dots (4).$$

Perchè il sistema (2) , (3) ammetta cinque soluzioni, è necessario pel citato teorema del Clebsch che la (4) o sia identicamente soddisfatta od una combinazione lineare delle (2) , (3) ; non può essere identicamente soddisfatta evidentemente, perchè il coefficiente di $\frac{dF}{dx}$ è l'unità,

non può essere conseguenza delle (2), (3), perchè manca $\frac{dF}{dt}$, e non può evidentemente essere conseguenza della sola (2). D'altra parte nemmeno se si suppone che F non contenga esplicitamente t, le soluzioni possono essere cinque, perchè allora il numero delle soluzioni sarebbe maggiore della differenza fra il numero delle variabili e il numero delle equazioni. Non possiamo avere dunque al più che quattro soluzioni. Supponiamo che le (2), (3) abbiano quattro soluzioni comuni indipendenti dal tempo: dovrà la (4) essere una combinazione lineare delle (2), (3), e poichè non contiene $\frac{dF}{dx'}$, dovrà ridursi semplicemente alla (3) moltiplicata per un fattore, sicchè dovranno i coefficienti della (4) essere proporzionali a quelli della (3), e si avrà quindi:

$$k=\frac{y'}{x'}\ ,\ k'=\frac{z'}{x'}$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{A(l)-B(k)}{l}=\frac{A(l')-B(k')}{l'}\quad .\ .\ .\ .\quad (5).$$

Supponendo, come faremo sempre in seguito, che X, Y, Z non contengano esplicitamente il tempo, questo non comparirà esplicitamente per le posizioni (1) nemmeno in k, k', l, l', onde le (5) sviluppate divengono:

$$\frac{dl}{dx}x'+\frac{dl}{dy}y'+\frac{dl}{dz}z'=2l\quad ,\quad \frac{dl'}{dx}x'+\frac{dl'}{dy}y'+\frac{dl'}{dz}z'=2l'.$$

Queste mostrano che l, l' sono funzioni omogenee di secondo grado di x', y', z'; quindi potremo porre:

$$l=x'^2\varphi\left(x\,,y\,,z\,,\frac{y'}{x'}\,,\frac{z'}{x'}\right)\,,\ l'=x'^2\psi\left(x\,,y\,,z\,,\frac{y'}{x'}\,,\frac{z'}{x'}\right)$$

Per le (1) si hanno ora le condizioni:

$$\left.\begin{aligned} Yx'-Xy'&=x'^3\varphi\left(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\frac{y'}{x'}\,,\,\frac{z'}{x'}\right)\\ Zx'-Xz'&=x'^3\psi\left(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\frac{y'}{x'}\,,\,\frac{z'}{x'}\right).\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Prendendo per k, k', l, l' le espressioni trovate, il sistema (2), (3) è completo, ed osservando che $\frac{y'}{x'}$, $\frac{z'}{x'}$ sono ora soluzioni della (2), e introducendo queste come variabili nella (3) in luogo di due delle variabili proposte, per es. y', z', le soluzioni della equazione che se ne dedurrà, saranno soluzioni anche della (2); ponendo

$$\eta=\frac{y'}{x'}\,,\quad \zeta=\frac{z'}{x'}\,,$$

l'equazione alle soluzioni comuni delle (2), (3) sarà:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\eta+\frac{dF}{dz}\zeta+\frac{dF}{d\eta}\varphi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\eta\,,\,\zeta)+\frac{dF}{d\zeta}\psi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\eta\,,\,\zeta)=0.$$

Dunque: *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè più problemi ammettano quattro integrali comuni indipendenti dal tempo, è che le forze soddisfino alle* (6). *Se*

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\varphi\left(t\,,\,\eta\,,\,\zeta\,,\,\frac{d\eta}{dt}\,,\,\frac{d\zeta}{dt}\right),\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=\psi\left(t\,,\,\eta\,,\,\zeta\,,\,\frac{d\eta}{dt}\,,\,\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

sono le equazioni differenziali del moto d'un punto nel piano sotto l'azione di forze funzioni esplicite del tem-

po, delle coordinate e delle derivate, e se ne' suoi quattro integrali che sono della forma:

$$\alpha = f\left(t, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right)$$

si sostituiscono $x, y, z, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}$ *rispettivamente a* $t, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, *i quattro integrali così ricavati saranno, senza ulteriore determinazione, i quattro integrali comuni a tutti i problemi del moto di un punto libero nello spazio sotto l' azione di forze funzioni esplicite delle coordinate, delle derivate e non del tempo, pei quali tra le forze sussistono le condizioni* (6).

Similmente il risultato del Korkine può formularsi così: *Se*

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varphi\left(t, \eta, \frac{d\eta}{dt}\right)$$

è l' equazione differenziale del movimento a una dimensione, sostituendo ne' suoi due integrali $x, y, \frac{y'}{x'}$ *in luogo di* $t, \eta, \frac{d\eta}{dt}$, *questi due integrali così trasformati converranno a tutti quei problemi a due dimensioni, nei quali sia soddisfatta la condizione:*

$$x'Y - y'X = x'^3\varphi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right).$$

II.

Le due forme degl' integrali comuni nell' ipotesi delle forze funzioni soltanto delle coordinate.

D' ora innanzi suppongo le forze funzioni delle sole coordinate; per le (1) altrettanto sarà di k, k', l, l', onde l' integrale generale della (2) è:

$$\alpha = \mathrm{F}(x\,,\,y\,,\,z\,,\,y'-kx'\,,\,z'-k'x'\,,\,t)\quad .\;.\;.\;(7)$$

Ponendo:

$$y'-kx'=u\quad,\quad z'-k'x'=v$$

la (3) diviene:

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}u+\frac{d\mathrm{F}}{dz}v+\frac{d\mathrm{F}}{du}l+\frac{d\mathrm{F}}{dv}l'$$

$$+x'\left[\frac{d\mathrm{F}}{dx}+k\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k'\frac{d\mathrm{F}}{dz}-\frac{d\mathrm{F}}{du}\left(u\frac{dk}{dy}+v\frac{dk}{dz}\right)-\frac{d\mathrm{F}}{dv}\left(u\frac{dk'}{dy}+v\frac{dk'}{dz}\right)\right]$$

$$-x'^2\left[\frac{d\mathrm{F}}{du}\left(\frac{dk}{dx}+k\frac{dk}{dy}+k'\frac{dk}{dz}\right)+\frac{d\mathrm{F}}{dv}\left(\frac{dk'}{dx}+k\frac{dk'}{dy}+k'\frac{dk'}{dz}\right)\right]=0.$$

Ora noi possiamo considerare x, y, z, t, u, v, x' come sette variabili indipendenti, e non essendo F, k, k', l, l' in tale ipotesi funzioni di x', quest' equazione si scinde nelle seguenti:

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dy}u+\frac{dF}{dz}v+\frac{dF}{du}l+\frac{dF}{dv}l'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{dF}{dx}+k\frac{dF}{dy}+k'\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{du}\left(\frac{dk}{dy}u+\frac{dk}{dz}v\right)-\frac{dF}{dv}\left(\frac{dk'}{dy}u+\frac{dk'}{dz}v\right)=0 \quad (9)$$

$$\frac{dF}{du}\left(\frac{dk}{dx}+k\frac{dk}{dy}+k'\frac{dk}{dz}\right)+\frac{dF}{dv}\left(\frac{dk'}{dx}+k\frac{dk'}{dy}+k'\frac{dk'}{dz}\right)=0 \,.\,. \quad (10).$$

Se non si ha identicamente:

$$\frac{dk}{dx}+k\frac{dk}{dy}+k'\frac{dk}{dz}=0 \;,\; \frac{dk'}{dx}+k\frac{dk'}{dy}+k'\frac{dk'}{dz}=0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

la (10) integrata dà, indicando con M , N , P delle funzioni di x , y , z :

$$\alpha=F(Mx'+Ny'+Pz' \,,\, x \,,\, y \,,\, z \,,\, t) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

e questa è la prima e più semplice forma d'integrali comuni a più problemi. Se invece si hanno identicamente le (11), si ha una seconda forma che studieremo nei §§. IX. e seg. Il Bertrand nota che le equazioni $k=cost.$, $k'=cost.$ rappresentano una serie di rette, e che quando k e k' siano l'una funzione dell'altra, l'equazione $k=cost.$ rappresenta una superficie sviluppabile: io non avrò bisogno di queste osservazioni.

Pel moto di un punto nel piano si hanno tutte le equazioni precedenti in cui mancano i termini che contengono z , v , k' , l': in tal caso si ha una sola forma d'integrali, e le (8) e (9) non ammettono evidentemente più di due soluzioni: esprimendo poi le condizioni, perchè da esse possa derivarsi un sistema completo di due o di tre equazioni,

si hanno soltanto gl' integrali:

$$\alpha=\left[(y+c)z'-(z+c_1)y'\right]^2+\varphi\left(\frac{y+c}{z+c_1}\right) \quad \ldots . \quad (13)$$

$$\alpha=(y+c)z'-(z+c_1)y'-Ct \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

e il sistema:

$$\alpha=(ay'+bz')^2+f(ay+bz) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\beta+t=\int\frac{d(ay+bz)}{\sqrt{\alpha-2\int f(ay+bz)d(ay+bz)}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

che convengono a tre rispettive classi di problemi, e che sono i soli integrali comuni a più problemi nel piano. Le (13) e (14) sono ottenute dal Bertrand, le (15) e (16) dal Korkine. Il Bertrand dà le (13) e (14) colle costanti $c=c_1=0$, il che non toglie evidentemente nulla alla generalità.

La (8), come osserva il Bertrand, dimostra il seguente teorema:

Tutti gl' integrali comuni a più problemi del moto di un punto nello spazio nell' ipotesi delle forze funzioni delle coordinate si possono ricavare dagl' integrali dei problemi del moto di un punto nel piano, rappresentando con y, z le coordinate correnti di quest' ultimo punto, sostituendo in quest' integrali $y'-kx'$, $z'-k'x'$ alle derivate $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, *introducendovi poi x come parametro costante, e facendo infine le opportune determinazioni* [1].

[1] Cfr. Bertr, Mem. cit. Art. XVIII, XIX, XX.

Analoga corrispondenza esiste fra gl' integrali dei problemi a una dimensione e gl'integrali comuni a più problemi a due dimensioni.

III.

Prima forma. Sistema di due integrali.

Se una funzione F non contiene alcuna delle variabili x', y', z', l' equazione $F=cost.$ non può essere integrale comune a più problemi: infatti allora si avrebbe identicamente:

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dx}x'+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dz}z'=o\,,$$

da cui si dedurrebbe, derivando rapporto a x', y', z' che F non potrebbe essere funzione di t, x, y, z. Per studiare quindi gl' integrali della prima forma (II, 12) potremo supporre una delle tre funzioni M, N, P uguale all' unità e dare all' integrale la forma:

$$\alpha=F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,x'-ay'-bz'\,,\,t)\;.\;.\;.\;(1)$$

essendo a e b funzioni soltanto di x, y, z.

Pongo:

$$u=x'-ay'-bz'\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$L=aY+bZ-X\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Derivando la (1) rapporto a t si avrà:

$$\frac{dF}{dx}(u+ay'+bz')+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dz}z'-\frac{dF}{du}\left\{\left(\frac{da}{dx}y'+\frac{db}{dx}z'\right)(u+ay'+bz')\right.$$
$$\left.+\left(\frac{da}{dy}y'+\frac{db}{dy}z'\right)y'+\left(\frac{da}{dz}y'+\frac{db}{dz}z'\right)z'+L\right\}=o,$$

in cui, non essendo F, a, b, X, Y, Z funzioni di y', z' devono potersi annullare separatamente i coefficienti di y'^2, z'^2, $y'z'$, y', z' e i termini indipendenti da y', z', con che si hanno le sei equazioni:

$$\frac{da}{dx}a+\frac{da}{dy}=0 \ldots (4), \quad \frac{db}{dx}b+\frac{db}{dz}=0 \ . (5)$$

$$\frac{da}{dx}b+\frac{da}{dz}+\frac{db}{dx}a+\frac{db}{dy}=0 \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$A(F)=\frac{dF}{dx}a+\frac{dF}{dy}-\frac{da}{dx}\frac{dF}{du}u=0 \ldots\ldots (7)$$

$$B(F)=\frac{dF}{dx}b+\frac{dF}{dz}-\frac{db}{dx}\frac{dF}{du}u=0 \ldots\ldots (8)$$

$$C(F)=\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dx}u-\frac{dF}{du}L=0 \ldots\ldots\ldots (9)$$

Si formino le equazioni:

$$(A,B)=2\left(\frac{da}{dx}b+\frac{da}{dz}\right)\frac{dF}{dx}+u\left(\frac{d^2b}{dx^2}a-\frac{d^2a}{dx^2}b+\frac{d^2b}{dxdy}-\frac{d^2a}{dxdz}\right)\frac{dF}{du}=0 \ . (10)$$

$$(A,C)= \quad 2\frac{da}{dx}u\frac{dF}{dx}+\left(A(L)+L\frac{da}{dx}-u^2\frac{d^2a}{dx^2}\right)\frac{dF}{du}=0 \ldots\ldots (11)$$

$$(B,C)= \quad 2\frac{db}{dx}u\frac{dF}{dx}+\left(B(L)+L\frac{db}{dx}-u^2\frac{d^2b}{dx^2}\right)\frac{dF}{du}=0 \ldots\ldots (12)$$

È chiaro che le (7), (8), (9) non possono ammettere più di due soluzioni comuni, ma esse non possono formare un sistema completo, perchè le (10), (11), (12) non si possono formare linearmente coi primi membri di quelle, poichè

ciascuno di essi contiene una derivata che non apparisce nelle (10), (11), (12). Dunque, se le (7), (8), (9) hanno due soluzioni comuni esse devono formare un sistema iacobiano, e le (10), (11), (12) devono esser verificate identicamente, onde si deve avere $\frac{da}{dx}=\frac{db}{dx}=\frac{da}{dz}=0$, le quali unite alle (4), (5), (6) mostrano che a e b sono costanti. Di più si avrà:

$$\frac{dL}{dx}a+\frac{dL}{dy}=0, \quad \frac{dL}{dx}b+\frac{dL}{dz}=0.$$

Indicando con a, b, c tre costanti qualunque si può porre dunque:

$$L=\pi(ax+by+cz).$$

La condizione per le forze è

$$aX+bY+cZ=\pi(ax+by+cz) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Dal sistema (7), (8), (9) ovvero sostituendo in quest'ultima equazione $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ in luogo di X, Y, Z e poi integrando, si trovano i due integrali:

$$\alpha=(ax'+by'+cz')^2-2\int\pi(ax+by+cz)d(ax+by+cz) \; . \; (14)$$

$$\beta+t=\int\frac{d(ax+by+cz)}{\sqrt{\alpha+2\int\pi(ax+by+cz)\,d(ax+by+cz)}} \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

analoghi agl' integrali (II, 15, 16).

IV.

Casi semplici.

Consideriamo alcuni casi semplici di un integrale comune della prima forma. Se F è funzione di u, t soltanto le (III, 7, 8, 9) dànno, indicando con C una costante;

$$\frac{da}{dx}=\frac{db}{dx}=o \quad , \quad L=-C,$$

ove C è una costante: da queste per le (III, 4, 5, 6), essendo m, n, p costanti:

$$a=-mz-n \quad , \quad b=my-p.$$

L'integrale e la condizione per le forze sono:

$$\alpha=m(zy'-yz')+x'+ny'+pz'-Ct \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$
$$C=m(zY-yZ)+X+nY+pZ.$$

Supponendo F funzione di u soltanto, si otterrebbero ancora queste equazioni con $C=o$. Supponiamo F funzione di x, y, u; essendo ora il numero delle variabili uguale al numero delle equazioni, il sistema (III, 7, 8, 9) non può ammettere alcuna soluzione, a meno che qualcheduna di quelle equazioni non sia identicamente soddisfatta o combinazione lineare delle altre: il che non può accadere che se

$$b=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ora $\frac{dF}{dt}=o$, ed il sistema riducendosi alle due sole equa-

zioni (III, 7, 9), non sarà possibile più di una soluzione, e questa esisterà quando si abbia:

$$-\frac{2da}{dx}=\frac{A(L)+L\frac{da}{dx}-u^2\frac{d^2a}{dx^2}}{L}$$

che si scinde nelle due:

$$\frac{d^2a}{dx^2}=0 \quad , \quad A(L)+3L\frac{da}{dx}=0 \; ,$$

onde per la (17) e per le (III, 4, 6), indicando con c e c_1 due costanti e con f una funzione arbitraria si ha:

$$a=\frac{x+c_1}{y+c} \quad , \quad L=\frac{1}{(x+c_1)^3}f\left(\frac{y+c}{x+c_1}\right) .$$

Potendosi supporre $c=c_1=0$, e scrivendo, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ invece di $\frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)$ la condizione per le forze e l'integrale sono:

$$xY-yX=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

$$\alpha=(x'y-xy')^2+\int f\left(\frac{y}{x}\right)d\frac{y}{x} \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

come si è trovato per il piano (II, 13).

In ultimo sia F funzione di y, z, u. Allora (III, 9) è $L=0$, e le equazioni $(A,C)=0$, $(B,C)=0$, dovendo essere verificate identicamente, daranno:

$$\frac{d^2a}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2b}{dx^2}=0 \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

La equazione $(A,B)=0$ pure deve divenire una identità, poichè non si può dedurre dalle due $A=0$, $B=0$; si avrà dunque:

$$\frac{da}{dx}b+\frac{da}{dz}=0, \quad \frac{d^2a}{dxdz}=\frac{d^2b}{dxdy} \quad . \; . \; (21)$$

La (III, 6) diviene allora

$$\frac{db}{dx}a+\frac{db}{dz}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Le (20) e le (III, 4, 5) mostrano che si ha:

$$a=\frac{x+\pi_1(z)}{y+\pi(z)} \quad , \quad b=\frac{x+\chi_1(y)}{x+\chi(y)}.$$

Dalla seconda delle (21) si rileverà che dev' essere:

$$\frac{\pi'}{(y+\pi)^2}=\frac{\chi'}{(z+\chi)^2}.$$

Contemporaneamente la prima delle (21) e la (22) danno:

$$\frac{x+\chi_1}{(y+\pi)(z+\chi)}+\frac{\pi'_1}{y+\pi}-\frac{\pi'(x+\pi_1)}{(y+\pi)^2}=0$$

$$\frac{x+\pi_1}{(y+\pi)(z+\chi)}+\frac{\chi'_1}{z+\chi}-\frac{\chi'(x+\chi_1)}{(x+\chi)^2}=0,$$

ossia

$$[x+\chi_1+(z+\chi)\pi'_1](y+\pi)-(z+\chi)(x+\pi_1)\pi'=0$$

$$[x+\pi_1+(z+\chi)\chi'_1](z+\chi)-(y+\pi)(x+\chi_1)\chi'=0$$

le quali, dovendo essere verificate qualunque sia x, danno

$$y+\pi=(z+\chi)\pi' \quad , \quad z+\chi=(y+\pi)\chi',$$

dondo $\pi'\chi'=1$, quindi π' e χ' dovranno essere costanti, e si dovrà avere, indicando con m , n due costanti:

$$\pi=mz+n, \qquad \chi=\frac{y-n}{m}.$$

Introducendo nelle precedenti equazioni queste espressioni per π e χ, esse daranno:

$$\pi'_1=-m\chi'_1,$$

e per conseguenza π'_1 e χ'_1 sono costanti, onde si può porre:

$$\pi_1=pz+q \quad , \quad \chi_1=-\frac{py-r}{m}.$$

L' integrale e la condizione per le forze sono adunque:

$$\alpha=xy'-yx'+p(zy'-yz')+m(xz'-zx')+nx'+qy'+rz' \ldots (23)$$

$$0=x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}+p(z\mathrm{Y}-y\mathrm{X})+m(x\mathrm{Z}-z\mathrm{X})+n\mathrm{X}+q\mathrm{Y}+r\mathrm{Z}.$$

Dalla discussione del Bertrand (Art. XVIII, XIX, XX Mem. cit.) risulta che un integrale della prima forma comune a più problemi si riduce sempre alla (16) con $n=p=0$ e con C differente o no da zero, e alla (19); passando dai casi semplici al caso generale, come pure rifacendo i detti Articoli della memoria del Bertrand, noi vedremo come si possa giungere immediatamente alle forme più generali.

V.

Un integrale indipendente dal tempo.

Sia $\frac{dF}{dt}=o$, ed il sistema (III, 7, 8, 9) abbia una soluzione. Allora le (10), (11), (12) o saranno identicamente soddisfatte ovvero conseguenza della (9); in questo secondo caso la proporzionalità dei coefficienti darà:

$$2\frac{\frac{da}{dx}b+\frac{da}{dz}}{u}=-\frac{\frac{d^2b}{dx^2}a-\frac{d^2a}{dx^2}b+\frac{d^2b}{dxdy}-\frac{d^2a}{dxdz}}{L}$$

$$2\frac{da}{dx}=-\frac{A(L)+L\frac{da}{dx}-u^2\frac{d^2a}{dx^2}}{L},$$

$$2\frac{db}{dx}=-\frac{B(L)+L\frac{db}{dx}-u^2\frac{d^2b}{dx^2}}{L}.$$

Da queste equazioni che devono essere verificate qualunque sia u, si ricavano anzitutto di nuovo le (IV, 20, 21) già integrate, e dalle quali abbiamo dedotto:

$$a=\frac{x+q+pz}{y+n+mz}\ ,\quad b=\frac{m(x+q)-p(y+n)}{y+n+mz}$$

e inoltre:

$$A(L)+3L\frac{da}{dx}=o\ ,\quad B(L)+3L\frac{db}{dx}=o.$$

Queste sviluppate divengono:

$$(x+q+pz)\frac{dL}{dx}+(y+n+mz)\frac{dL}{dy}+3L=o,$$

$$\left\{m(x+q)-p(y+n)\right\}\frac{dL}{dx}+(y+n+mz)\frac{dL}{dz}+3mL=o,$$

combinandole:

$$p\frac{dL}{dx}+m\frac{dL}{dy}-\frac{dL}{dz}=o,$$

il cui integrale generale è $L=\psi(x+pz+c\ ,\ y+mz+c_1)$: quindi la prima delle precedenti ci mostra che si ha:

$$L=\frac{1}{(y+n+mz)^3}\varphi\left(\frac{x+q+pz}{y+n+mz}\right).$$

Essendo permesso di porre $n=q=o$, la condizione per le forze e l'integrale sono:

$$xY-yX+m(xZ-zX)+p(zY-yZ)=\frac{1}{(y+mz)^2}\varphi\left(\frac{x+pz}{y+mz}\right),$$

$$\alpha=\Big[xy'-yx'+m(xz'-zx')+p(zy'-yz')\Big]^2+$$

$$+2\int\varphi\left(\frac{x+pz}{y+mz}\right)d\left(\frac{x+pz}{y+mz}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (24)$$

alla qual forma il Bertrand giunge con $m=p=o$.

Il caso in cui le (10), (11), (12) sono verificate identicamente è stato trattato alla fine del §. III.

VI.

Sistemi di due integrali con altro metodo.

Da quanto abbiamo detto nel §. II risulta che gl'integrali comuni a più problemi a tre dimensioni si possono anche dedurre dagl'integrali dei problemi a due dimensioni della forma:

$$\alpha = F[y\,,\, z\,,\, \varphi(y\,,\, z)y' + \psi(y\,,\, z)z'\,,\, t],$$

la quale può rappresentare le (II, 13-16). La (II, 15) dà luogo ad integrali compresi nella forma:

$$\alpha = F\left\{[\varphi(x)(y' - kx') + \psi(x)(z' - k'x')]^2 + f[\varphi(x)y + \psi(x)z], x\right\}.$$

Per brevità poniamo:

$$U = k\varphi(x) + k'\psi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

$$H = -UX + \varphi(x)Y + \psi(x)Z \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

$$\rho = \varphi(x)y + \psi(x)z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

$$u = (-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z')^2 + f(\rho\,,\, x)\,. \qquad (4)$$

allora derivando l'ultima equazione integrale si ottiene:

$$\frac{dF}{du}\left\{2\left[-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z'\right]\right.$$

$$\left[-\frac{dU}{dx}x'^2 + \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy}\right)x'y' + \left(\psi'(x) - \frac{dU}{dz}\right)x'z' + H\right]$$

$$\left. + \frac{df}{d\rho}\left[(\varphi'(x)y + \psi'(x)z)x' + \varphi(x)y' + \psi(x)z'\right] + \frac{df}{dx}x'\right\} + \frac{dF}{dx}x' = 0.$$

Sostituendo per y' il suo valore tratto dalla (4) si ha:

$$\frac{dF}{du}\Big\{2\sqrt{u-f}\Big[\Big(-\frac{dU}{dx}+\Big(\varphi'(x)-\frac{dU}{dy}\Big)\frac{U}{\varphi(x)}\Big)x'^2+$$
$$+\Big(\Big(\frac{dU}{dy}-\varphi'(x)\Big)\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)}+\psi'(x)-\frac{dU}{dz}\Big)x'z'+$$
$$+\Big(\varphi'(x)-\frac{dU}{dy}\Big)\frac{\sqrt{u-f}}{\varphi(x)}x'+H\Big]+\frac{df}{d\rho}\Big((U+\varphi'(x)y+\psi'(x)z)x'+$$
$$+\sqrt{u-f}\Big)+\frac{df}{dx}x'\Big\}+\frac{dF}{dx}x'=o,$$

in cui potendosi considerare x , y , z , u , z' come variabili indipendenti si possono mandare a zero i coefficienti delle diverse potenze di x' e z'; i termini in x' danno:

$$\frac{dF}{du}\Big\{\frac{2(u-f)}{\varphi(x)}\Big(\varphi'(x)-\frac{dU}{dy}\Big)+\frac{df}{d\rho}\Big(U+\varphi'(x)y+\psi'(x)z\Big)+\frac{df}{dx}\Big\}+$$
$$+\frac{dF}{dx}=o,$$

equazione della forma:

$$\frac{dF}{du}(A+Bu)+\frac{dF}{dx}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dove A e B non dipendono dalla variabile u. Affinchè la (5) possa essere verificata, come è stato supposto da una funzione F che dipenda soltanto da x e da u, è necessario che i suoi coefficienti non contengano altre variabili, quindi A e B dovranno contenere soltanto x. Per integrare la (5) si ricorra alla equazione:

$$\frac{du}{dx}=Bu+A,$$

che dà:

$$u = e^{\int B dx}\left(\int A e^{-\int B dx} dx + C\right),$$

per cui l'integral generale della (5) è:

$$\alpha = F(\psi_1(x)u + \psi_2(x)),$$

talchè possiamo anche prendere per integrale:

$$\alpha = \psi_1(x)u + \psi_2(x) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

che, sostituendo per u il suo valor (4), è della forma:

$$\alpha = [-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z']^2 F(x) + f(\rho, x) \quad \ldots \quad (7).$$

Derivando questa si ha:

$$2\left(-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z'\right)\left[-\frac{dU}{dx}x'^2 + \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy}\right)x'y' + \left(\psi'(x) - \frac{dU}{dz}\right)x'z' + H\right]F(x) + F'(x)x'\left(-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z'\right)^2 + \frac{df}{d\rho}\left[(\varphi'(x)y + \psi'(x)z)x' + \varphi(x)y' + \psi(x)z'\right] + \frac{df}{dx}x' = 0,$$

che, dovendo essere verificata per qualsiasi valore di x', y', si scomporrà nelle seguenti:

$$\frac{dU}{dx}F(x) + F'(x)U = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\varphi(x)UF(x)\right) = F(x)\frac{dU}{dy}, \quad \frac{d}{dx}\left(\psi(x)UF(x)\right) = F(x)\frac{dU}{dz}$$

$$\left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy}\right)F(x) + F'(x)\varphi(x) = 0, \quad 2\left(\psi'(x) - \frac{dU}{dz}\right)F(x) + F'(x)\psi(x) = 0$$

$$-2UF(x)H + \frac{df}{d\rho}\left(\varphi'(x)y + \psi'(x)z\right) + \frac{df}{dz} = 0, \quad 2F(x)H + \frac{df}{d\rho} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

La quarta e quinta derivate rapporto a y e a z mostrano che si ha:

$$U=\pi_1(x)y+\pi_2(x)z+\pi_3(x).$$

Sostituendo questo valore di U nella prima, se ne ricava che si deve avere la forma più particolare:

$$U=\frac{my+nz+a}{\sqrt{F(x)}}\ldots$$

Dalla seconda e dalla terza si vede che la forma più generale che può assegnarsi ad U è:

$$U=\frac{a}{\sqrt{F(x)}}\ \ldots\ldots\ldots\ (9)$$

e che si ha:

$$\varphi(x)=\frac{b}{\sqrt{F(x)}}\,,\ \psi(x)=\frac{c}{\sqrt{F(x)}}\ldots(10)\,,\ \rho=\frac{by+cz}{\sqrt{F(x)}}\ldots(11)$$

Combinando la sesta e settima si ha perciò:

$$\frac{df}{d\rho}\left(2a\sqrt{F(x)}+\rho F'(x)\right)-2F(x)\frac{df}{dx}=0\,,$$

da cui integrando e riponendo per ρ il suo valore (11):

$$f=f(ax+by+cz)\ \ldots\ldots\ldots\ (12)$$

Sostituendo le espressioni (9-12) nella (7) e nell'ultima delle (8), queste divengono della stessa forma delle (III, 14), ed è chiaro che in tal caso esiste anche l'integrale (III, 15).

VII.

Un integrale indipendente dal tempo con altro metodo.

Nel dedurre dalle (II, 13, 14) gl'integrali comuni a più problemi a tre dimensioni è di manifesto interesse il non supporvi $c=c_1=o$, come fa il Bertrand, il quale (Art. XX e XXI Mem. cit.), dovendo poi introdurre x come parametro costante ottiene risultati sotto forma meno generale di quelli ai quali, seguendo lo stesso metodo, giungiamo in questo e nel seguente paragrafo, e che si ottengono eziandio coll'altro metodo. La (II, 13) dà luogo ad integrali della seguente forma:

$$\alpha=F\left\{\left[(y+\varphi(x))(z'-kx')-(z+\psi(x))(y'-k'x')\right]^2 + \pi\left(\frac{y+\varphi(x)}{z+\psi(x)}, x\right), x\right\}.$$

Posto:

$$U=k'(z+\psi(x))-k(y+\varphi(x)) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$H=UX-(z+\psi(x))Y+(y+\varphi(x))Z \quad \dots\dots \quad (2)$$

$$K=(z+\psi(x))\varphi'(x)-(y+\varphi(x))\psi'(x) \quad \dots\dots \quad (3)$$

$$r=\frac{y+\varphi(x)}{z+\psi(x)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4),$$

$$u=[Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z']^2+\pi(r,x) \dots (5)$$

derivando si ottiene:

$$\frac{dF}{du}\Big\{2\Big(Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z'\Big).$$

$$.\left[\frac{dU}{dx}x'^2+\left(\frac{dU}{dy}-\psi'(x)\right)x'y'+\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)x'z'+H\right]$$

$$+\frac{d\pi}{dr}\frac{1}{(z+\psi(x))^2}\Big[Kx'+(z+\psi(x))y'-(y+\varphi(x))z'\Big]$$

$$+\frac{d\pi}{dx}x'\Big\}+\frac{dF}{dx}x'=o\,.$$

Sostituendo per y' il suo valore tratto dalla (5), e indi uguagliando a zero il coefficiente di x', si ha:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\Big\{\frac{2(u-\pi)}{z+\psi(x)}\left(\psi'(x)-\frac{dU}{dy}\right)+\frac{d\pi}{dr}\frac{K+U}{(z+\psi(x))^2}+\frac{d\pi}{dx}\Big\}=o\;,$$

che ha la forma (VI, 5): e quindi l'integrale ha la forma (VI, 6), ossia sostituendo per u il suo valore (5):

$$\alpha=[Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z']^2f(x)+F(r,x)\;\;..\;(6)$$

Derivando questa si ha:

$$2\Big[Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z'\Big].$$

$$.\left[\frac{dU}{dx}x'^2+\left(\frac{dU}{dy}-\psi'(x)\right)x'y'+\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)x'z'+H\right]f(x)$$

$$+f'(x)x'\Big[Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z'\Big]^2+$$

$$\frac{dF}{dr}\frac{Kx'+(z+\psi(x))y'-(y+\varphi(x))z'}{(z+\psi(x))^2}+\frac{dF}{dx}x'=o$$

che dà luogo alle seguenti:

$$2\frac{dU}{dx}f(x)+f'(x)U=0,\ \frac{d}{dx}\Big(U(z+\psi(x))f(x)\Big)=U\frac{dU}{dy},$$

$$\frac{d}{dx}\Big(U(y+\varphi(x)f(x)\Big)=-U\frac{dU}{dz},$$

$$2\Big(\psi'(x)-\frac{dU}{dy}\Big)f(x)+(z+\psi(x))f'(x)=0,$$

$$2\Big(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\Big)f(x)+(y+\varphi(x)')f'(x)=0,$$

$$2HUf(x)+\frac{dF}{dr}\frac{K}{(z+\varphi(x))^2}+\frac{dF}{dx}=0, 2Hf(x)(z+\psi(x))^2=\frac{dF}{dr}. \ldots (7)$$

Dalle prime cinque si deduce facilmente:

$$U=ay+bz+c\ ,\ \varphi(x)=-bx+b'\ ,\ \psi(x)=ax+a'\ ,\ f(x)=1.$$

Combinando la sesta e settima si ha:

$$\Big[z+\psi(x)\Big]^2\frac{d\,F(r,x)}{dx}+(U+K)\frac{dF(r,x)}{dr}=0\ ,$$

ossia

$$\Big(\frac{y-bx+b'}{r}\Big)^2\frac{dF(r,x)}{dx}+(c-ab'-a'b)\frac{dF(r,x)}{dr}=0,$$

dove si possono considerare x , y , r come tre variabili indipendenti, e quindi questa non può essere identicamente soddisfatta a meno che non si abbia:

$$\frac{dF}{dx}=0\ ,$$

e inoltre

$$\frac{dF}{dr}=o \quad \text{ovvero} \quad c=ab'+a'b.$$

All' una e all' altra ipotesi corrispondono rispettivamente gl' integrali:

$$\alpha=a(yx'-xy')+b(zx'-xz')+(yz'-zy')+cx'-a'y'+b'z'. \quad (8)$$

$$\alpha=[a((y+b')x'-xy')+b((z+a')x'-xz')+(y+b')z'-(z+a')y']^2$$
$$[+F\left(\frac{y+b'-bx}{z+a'+ax}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

le quali forme, potendosi in quest' ultima senza togliere nulla alla generalità supporre $a'=b'=o$, si riducono alle (IV, 23) e (V, 24) trovate coll' altro metodo. L' ultima delle (7) dà le relative condizioni delle forze, che si ottengono anche derivando le (8) e (9) e sostituendo poi X, Y, Z in luogo di $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

VIII.

Un integrale dipendente dal tempo.

La (II, 14) dà luogo ad integrali della forma:

$$\alpha=F\left\{(y+\varphi(x))z'-(z+\psi(x))y'-f(x)t\,,\,x\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Pongo:

$$U=k(z+\psi(x))-k'(y+\varphi(x)). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$K=UX-(z+\psi(x))Y+(y+\varphi(x))Z-f(x) \quad \ldots \quad (3)$$
$$u=Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x)(z'-f(x)t. \quad \ldots \quad (4)$$

e derivando la (1) trovo:

$$\frac{dF}{du}\left\{\frac{dU}{dx}x'^2+\left(\frac{dU}{dy}-\psi'(x)\right)x'y'+\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)x'z'\right.$$

$$\left.+\frac{f'(x)}{f(x)}\left[ux'-Ux'^2+(z+\psi(x))x'y'-(y+\varphi(x))x'z'\right]+K\right\}+\frac{dF}{dx}x'=0.$$

Sostituisco per t il suo valore tratto dalla (4), e col porre uguale a zero il coefficiente di x', trovo:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\frac{f'(x)}{f(x)}u=0\,.$$

Essendo l' integrale generale di questa $c=\lambda\left(\frac{u}{f(x)}\right)$, si vede che la (1) deve ridursi alla forma:

$$\alpha=\frac{u}{f(x)}$$

ossia, riponendo per u la sua espressione, alla forma:

$$\alpha=\frac{Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z'}{f'(x)}-t\;\ldots\ldots(5)$$

Se si pone:

$$K'=UX-(z+\psi(x))Y+(y+\varphi(x))Z\;\ldots\ldots\ldots(6)$$

la (5) derivata, dà:

$$\left[\frac{dU}{dx}x'^2+\left(\frac{dU}{dy}-\psi'(x)\right)x'y'+\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)x'z'+K'\right]f(x)+$$

$$-f'(x)x'[Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))z']-[f(x)]^2=0\,,$$

che si scinde nelle seguenti:

$$f(x)\frac{dU}{dx}-f'(x)U=o, \quad f(x)\left(\frac{dU}{dy}-\psi'(x)\right)+f'(x)\left(z+\psi(x)\right)=o,$$

$$f(x)\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)-f'(x)\left(y+\varphi(x)\right)=o, \qquad K'=f(x),$$

dalle quali si deduce facilmente indicando con a, b, c, a', b', m delle costanti:

$$U=ay+bz+c, \quad \varphi(x)=-bx+b', \quad \psi(x)=ax+a', \quad K'=\frac{1}{m} \ldots (7)$$

La (6) ove si ponga per K' il suo valore dà la condizione cui debbono soddisfare le componenti delle forze; l'integrale (5), indicando con a, b, c, f, g, h, C sette costanti qualunque, prende la forma seguente:

$$\alpha=a(xy'-x'y)+b(yz'-y'z)+c(zx'-z'x)+fx'+gy'+hz'-Ct \ldots (8)$$

La (VII, 8) è della stessa forma di quest'ultima ove si supponga $C=o$. Tralasciamo di dedurre questa classe di problemi dalle condizioni necessarie e sufficienti, perchè le (III, 7, 8, 9,) diano luogo ad un sistema completo di quattro equazioni. Se nella (8) si pone $b=c=f=g=o$, si ha il risultato (IV), cui giunge il Bertrand, da cui per mezzo d'una trasformazione lineare e precisamente ponendo $f+gz-ay$, $g+ax-bz$, z rispettivamente al luogo di ay, $-ax$, z si giunge alla forma (8) stessa. È così esaurito lo studio degl'integrali della prima forma.

IX.

Seconda forma. Sistemi di quattro integrali dipendenti dal tempo.

Nello studio degl' integrali della seconda forma (II, 7), pei quali abbiam visto aver luogo le equazioni (II, 11), il Bertrand si occupa esclusivamente del caso, in cui le rette k=*cost.*, k'=*cost.* siano normali ad una serie di superficie, nella quale ipotesi mostra che, prendendo un certo sistema di coordinate curvilinee, la (II, 7) assume la forma:

$$\alpha = \mathrm{F}(q_1, q_2, q_3, q'_1, q'_2, t).$$

Indi, fatto vedere che i soli casi nuovi da tentarsi sono quelli, in cui le superficie q_3=*cost.* sono sfere o superficie canali, potendo allora il sistema suddetto di coordinate corrispondere alle coordinate polari e passando poi alle coordinate rettilinee, trasforma l'integral precedente in questo:

$$\alpha = \mathrm{F}(xz'-zx', \; xy'-yx', \; \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \; t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

da cui, nel caso di $\frac{d\mathrm{F}}{dt}=o$, si deduce che: *Se in un integrale indipendente dal tempo di un problema del movimento di un punto nel piano sotto l'azione di forze* $\varphi(\eta,\zeta)$, $\psi(\eta,\zeta)$, *funzioni delle coordinate* η,ζ, si *sostituiscono* $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $xy'-yx'$, $xz'-zx'$ *in luogo di* η,ζ, η',ζ', *si ha un integrale comune a tutti i problemi*

a tre dimensioni, in cui le forze soddisfano alle due condizioni :

$$x^2(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X})=\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),\ x^2(x\mathrm{Z}-z\mathrm{X})=\psi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\ .\ .\ (2)$$

Indipendentemente da questi risultati del Bertrand (*) io mi propongo ora di trovare tutti i possibili sistemi di quattro e tre integrali indipendenti o no dal tempo.

Pongasi:

$$n=-\left(\frac{dk}{dy}u+\frac{dk}{dz}v\right),\ n'=-\left(\frac{dk'}{dy}u+\frac{dk'}{dz}v\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{dl}{dx}+k\frac{dl}{dy}+k'\frac{dl}{dz}+l\frac{dk}{dy}+l'\frac{dk}{dz}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ \alpha'&=\frac{dl'}{dx}+k\frac{dl'}{dy}+k'\frac{dl'}{dz}+l\frac{dk'}{dy}+l'\frac{dk'}{dz}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}\right\}(4)$$

le (II, 8, 9) diverranno:

$$\mathrm{A(F)}=\frac{d\mathrm{F}}{dx}+k\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k'\frac{d\mathrm{F}}{dz}+n\frac{d\mathrm{F}}{du}+n'\frac{d\mathrm{F}}{dv}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

$$\mathrm{B(F)}=\frac{d\mathrm{F}}{dt}+u\frac{d\mathrm{F}}{dy}+v\frac{d\mathrm{F}}{dz}+l\frac{d\mathrm{F}}{du}+l'\frac{d\mathrm{F}}{dv}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

Formando l'espressione A(B(F))—B(A(F)) ed uguagliandola a zero, si ha:

$$(\mathrm{B,A})=2n\frac{d\mathrm{F}}{dy}+2n'\frac{d\mathrm{F}}{dz}+\left(\frac{d^2k}{dy^2}u^2+\frac{d^2k}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k}{dydz}uv+\alpha\right)\frac{d\mathrm{F}}{du}$$
$$+\left(\frac{d^2k'}{dy^2}u^2+\frac{d^2k'}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k'}{dydz}uv+\alpha'\right)\frac{d\mathrm{F}}{dv}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

(*) Cfr. Bertr. Mem. cit. Art. XXI-XXVII.

Il sistema (5), (6) ammette quattro soluzioni, se è completo o iacobano; ma la (7) non può essere evidentemente una conseguenza delle (5), (6), quindi essa dev'essere identicamente verificata, cioè si deve avere:

$$n=n'=0\ ,\quad \frac{d^2k}{dy^2}u^2+\frac{d^2k}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k}{dy\,dz}uv+\alpha=0,$$

$$\frac{d^2k'}{dy^2}u^2+\frac{d^2k'}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k'}{dy\,dz}uv+\alpha'=0\ ,$$

le quali non possono essere identicamente soddisfatte che se si ha:

$$\frac{dk}{dy}=\frac{dk}{dz}=\frac{dk'}{dy}=\frac{dk'}{dz}=\alpha=\alpha'=0\,.$$

Da queste, dalle (4) e dalle (II, 11) si trae, indicando con a, b, c tre costanti:

$$k=-\frac{a}{b}\ ,\quad k'=-\frac{a}{c}$$

$$\frac{dl}{dx}-\frac{a}{b}\frac{dl}{dy}-\frac{a}{c}\frac{dl}{dz}=0\ ,\quad \frac{dl'}{dx}-\frac{a}{b}\frac{dl'}{dy}-\frac{a}{c}\frac{dl'}{dz}=0\ ,$$

onde:

$$l=\varphi\,(ax+by\ ,\ ax+cz)\ ,\ l'=\psi\,(ax+by\ ,\ ax+cz).$$

Le condizioni per le forze sono allora:

$$aX+bY=\varphi(ax+by,ax+cz),\ aX+cZ=\psi(ax+by,ax+cz), \quad (8)$$

e le (5), (6) formano il sistema iacobiano

$$\frac{dF}{dx}-\frac{a}{b}\frac{dF}{dy}-\frac{a}{c}\frac{dF}{dz}=0$$

$$\frac{dF}{dt}+u\frac{dF}{dy}+v\frac{dF}{dz}+\varphi\frac{dF}{du}+\psi\frac{dF}{dv}=0,$$

Ora $ax+by$, $ax+cz$ sono soluzioni della prima equazione: ponendo quindi

$$ax+by=\eta\ ,\quad ax+cz=\zeta\ ,\quad \frac{d\eta}{dt}=\eta'\ ,\quad \frac{d\zeta}{dt}=\zeta'\ ,$$

e introducendo nella seconda η e ζ in luogo delle variabili y e z, si ottiene l'equazione:

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{d\eta}\eta'+\frac{dF}{d\zeta}\zeta'+\frac{dF}{d\eta'}\varphi(\eta\,,\zeta)+\frac{dF}{d\zeta'}\psi(\eta\,,\zeta)=0,$$

che avrà per soluzioni le quattro soluzioni cercate.

Dunque: *Qualunque sistema di quattro integrali funzioni anche del tempo, comuni a più problemi relativi al moto di un punto nello spazio sotto l'azione di forze, funzioni delle sole coordinate, può dedursi immediatamente dai quattro integrali delle equazioni del moto di un punto nel piano sotto l'azione di forze pure funzioni delle sole coordinate. Basta sostituire alle coordinate* η, ζ *del punto nel piano e alle derivate rapporto al tempo* η', ζ' *rispettivamente le quantità* $ax+by$, $ax+cz$, $ax'+by'$, $ax'+cz'$. *Se* $\varphi(\eta\,,\zeta)$, $\psi(\eta\,,\zeta)$ *erano le componenti delle forze acceleratrici secondo gli assi* η, ζ *del piano, gl'integrali così ottenuti converranno senza ulteriore determinazione a tutti i problemi del moto di un punto nello spazio, sollecitato da forze le cui componenti secondo gli assi* x, y, z *soddisfino alle equazioni* (8).

Le (II, 16, 17) danno un teorema analogo: *Ogni sistema di due integrali dipendenti dal tempo comuni a più problemi a due dimensioni si ricava dai due integrali dei problemi a una dimensione. Se*

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\varphi(\eta) \quad (9)$$

era l'equazione differenziale del moto di quest' ultimo punto, sostituendo ne' suoi due integrali per η *e* $\frac{d\eta}{dt}$ *rispettivamente* $ax+by$, $ax'+by'$, *si ottengono due integrali comuni a tutti i problemi a due dimensioni, in cui le forze soddisfano alla equazione di condizione:*

$$aX+bY=\varphi(ax+by).$$

Nell'ipotesi attuale delle forze è chiaro che non possono esistere sistemi di quattro integrali comuni, che non contengano il tempo, pel moto d'un punto nello spazio, come pure non possono esistere due integrali indipendenti dal tempo, se il punto si muove nel piano (Cfr. §. I.).

X.

Sistemi di tre integrali indipendenti dal tempo.

Per questa ricerca dovremo supporre che nel sistema (X, 5, 6) manchi il termine $\frac{dF}{dt}$: e la (7) dovrà o essere identicamente soddisfatta oppure una conseguenza della (5); assumendo questa seconda ipotesi più generale,

si ha:

$$nv = n'u \;,\; 2nl = u\left(\frac{d^2k}{dy^2}u^2 + \frac{d^2k}{dz^2}v^2 + 2\frac{d^2k}{dy\,dz}uv + \alpha\right),$$

$$2n'l' = v\left(\frac{d^2k'}{dy^2}u^2 + \frac{d^2k'}{d\,z^2}v^2 + 2\frac{d^2k'}{dy\,dz}uv + \alpha'\right),$$

le quali sono identicamente soddisfatte, se si ha:

$$\frac{dk}{dy} = \frac{dk'}{dz} \;,\; \frac{dk'}{dy} = \frac{dk}{dz} = \frac{d^2k}{dy^2} = \frac{d^2k'}{d\,z^2} = 0,$$

$$2l\frac{dk}{dy} + \alpha = 2l'\frac{dk'}{dz} + \alpha' = 0.$$

Da queste e dalle (II, 11) e (IX, 4) si ha integrando:

$$k = \frac{y+c_1}{x+c} \quad , \quad k' = \frac{z+c_2}{x+c} \,,$$

$$l = \frac{1}{(c+x)^3}\varphi\left(\frac{y+c_1}{x+c} \,,\, \frac{z+c_2}{x+c}\right),\; l' = \frac{1}{(x+c)^3}\psi\left(\frac{y+c_1}{x+c} \,,\, \frac{z+c_2}{x+c}\right).$$

Supponendo, il che non toglie la generalità ai risultati, le costanti $c = c_1 = c_2 = 0$, le condizioni per le forze divengono precisamente le (IX, 2), date pure dal Bertrand, e le equazioni che danno i tre integrali comuni assumono ora la forma:

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} - u\frac{dF}{du} - v\frac{dF}{dv} = 0,$$

$$u\frac{dF}{dy} + v\frac{dF}{dz} + \frac{1}{x^3}\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\frac{dF}{du} + \frac{1}{x^3}\psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\frac{dF}{dv} = 0.$$

Se osserviamo che $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, ux , vx sono soluzioni della prima, ponendo:

$$\frac{y}{x}=\eta \; , \; \frac{z}{x}=\zeta \; , \; ux=u_1 \; , \; vx=v_1 \; ,$$

ed introducendo nella seconda η , ζ , u_1 , v_1 come nuove variabili in luogo di y , z , u , v, si ha l' equazione:

$$\frac{dF}{d\eta}u_1+\frac{dF}{d\zeta}v_1+\frac{dF}{du_1}\varphi(\eta\,,\,\zeta)+\frac{dF}{dv_1}\psi(\eta\,,\,\zeta)=0,$$

le cui soluzioni sono soluzioni comuni alle due precedenti, e quindi sono gli integrali cercati.

Il teorema del Bertrand può dunque enunciarsi così: *Tutti i sistemi di tre integrali indipendenti dal tempo comuni a più problemi relativi al moto di un punto nello spazio sotto l' azione di forze, funzioni soltanto delle coordinate, si deducono dai sistemi dei tre integrali indipendenti dal tempo relativi al moto di un punto nel piano sotto l' azione di forze pure funzioni delle sole coordinate. Basta sostituire in questi tre ultimi integrali in luogo delle coordinate* η , ζ *e delle loro derivate rapporto al tempo rispettivamente le quantità* $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $xy'-x'y$, $xz'-x'z$. *Se* $\varphi(\eta\,,\,\zeta)$, $\psi(\eta\,,\,\zeta)$ *erano le componenti secondo gli assi* η , ζ *delle forze che agivano sul punto nel piano, gl' integrali così ricavati converranno senza ulteriore determinazione a tutti i problemi del moto di un punto nello spazio, nei quali le componenti* X , Y , Z *delle forze acceleratrici secondo gli assi* x , y , z *soddisfano alle due equazioni* (IX , 2).

La (II, 14) dà luogo ad un teorema analogo: *Se la (IX, 9) è l'equazione differenziale del moto di un punto per un problema a una dimensione, e se si sostituiscono nel suo integrale indipendente dal tempo in luogo di* n , n' *rispettivamente le quantità* $\frac{y}{x}$, $xy'-x'y$, *l'integrale così ottenuto converrà a tutti i problemi a due dimensioni, nei quali le forze soddisfano alla equazione di condizione:*

$$x^2(xY-yX)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Questi due teoremi comprendono come caso particolare il principio delle aree.

XI.

Metodo per la ricerca dei sistemi di tre integrali comuni dipendenti dal tempo.

Se le (IX, 5, 6) non costituiscono un sistema completo esse avranno tre soluzioni comuni, nel caso che le tre equazioni (IX, 5, 6, 7) formino un sistema completo. Poniamo:

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{d^2k}{dy^2}u^2+\frac{d^2k}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k}{dy\,dz}uv+\alpha, \\ p'&=\frac{d^2k'}{dy^2}u^2+\frac{d^2k'}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k'}{dy\,dz}uv+\alpha' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

la (IX, 7) prenderà la forma:

$$C(F)=(B\,,A)=2n\frac{dF}{dy}+2n'\frac{dF}{dz}+p\frac{dF}{du}+p'\frac{dF}{dv}=0 \quad \ldots (2)$$

Uguagliando a zero le espressioni A(C(F))—C(A(F)), B(C(F))—C(B(F)) si ha:

$$(A,C)=\frac{dF}{dy}\left\{C(k)-2A(n)\right\}+\frac{dF}{dz}\left\{C(k')-2A(n')\right\}$$

$$+\frac{dF}{du}\left\{C(n)-A(p)\right\}+\frac{dF}{dv}\left\{C(n')-A(p')\right\}=o\ldots(3)$$

$$(B,C)=\frac{dF}{dy}\left\{C(u)-2B(n)\right\}+\frac{dF}{dz}\left\{C(v)-2B(n')\right\}$$

$$+\frac{dF}{du}\left\{C(l)-B(p)\right\}+\frac{dF}{dv}\left\{C(l')-B(p')\right\}=o\ldots(4)$$

Ma si ha tenendo conto delle (II, 11):

$$C(k)-2A(n)=-6\left[u\left\{\left(\frac{dk}{dy}\right)^2+\frac{dk'}{dy}\frac{dk}{dz}\right\}+v\left\{\frac{dk}{dy}\frac{dk}{dz}+\frac{dk'}{dz}\frac{dk}{dz}\right\}\right],$$

$$C(k')-2A(n')=-6\left[u\left\{\frac{dk}{dy}\frac{dk'}{dy}+\frac{dk'}{dy}\frac{dk'}{dz}\right\}+v\left\{\frac{dk}{dz}\frac{dk'}{dy}+\left(\frac{dk'}{dz}\right)^2\right\}\right]$$

ovvero anche:

$$C(k)-2A(n)=6\left[u\left\{\frac{d^2k}{dxdy}+k\frac{d^2k}{dy^2}+k'\frac{d^2k}{dydz}\right\}\right.$$

$$\left.+v\left\{\frac{d^2k}{dx\,dz}+k\frac{d^2k}{dy\,dz}+k'\frac{d^2k}{dz^2}\right\}\right]$$

$$C(k')-2A(n')=6\left[u\left\{\frac{d^2k'}{dxdy}+k\frac{d^2k'}{dy^2}+k'\frac{d^2k'}{dydz}\right\}\right.$$

$$\left.+v\left\{\frac{d^2k'}{dx\,dz}+k\frac{d^2k'}{dy\,dz}+k'\frac{d^2k'}{dz^2}\right\}\right].$$

Negli sviluppi di C(n)—A(p), C(n')—A(p') sostituendo

alle somme dei termini che contengono derivate terze di k e k', somme di termini che contengono soltanto derivate seconde mediante le (II, 11), si ha:

$$C(n)-A(p)=6\left\{\left(\frac{dk}{dy}\frac{d^2k}{dy^2}+\frac{dk'}{dy}\frac{d^2k}{dydz}\right)u^2+\left(\frac{dk}{dz}\frac{d^2k}{dydz}+\frac{dk'}{dz}\frac{d^2k}{dz^2}\right)v^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dk}{dy}\frac{d^2k}{dy\,dz}+\frac{dk'}{dy}\frac{d^2k}{dz^2}+\frac{dk}{dz}\frac{d^2k}{dy^2}+\frac{dk'}{dz}\frac{d^2k}{dydz}\right)uv\right\}-$$

$$-\left(\frac{d\alpha}{dy}+k\frac{d\alpha}{dy}+k'\frac{d\alpha}{dz}+\alpha\frac{dk}{dy}+\alpha'\frac{dk}{dz}\right),$$

$$C(n')-A(p')=6\left\{\left(\frac{dk}{dy}\frac{d^2k'}{dy^2}+\frac{dk'}{dy}\frac{d^2k'}{dydz}\right)u^2+\left(\frac{dk}{dz}\frac{d^2k'}{dydz}+\frac{dk'}{dy}\frac{d^2k'}{dz^2}\right)v^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dk}{dy}\frac{d^2k'}{dydz}+\frac{dk'}{dy}\frac{d^2k'}{dz^2}+\frac{dk}{dz}\frac{d^2k'}{dy^2}+\frac{dk'}{dz}\frac{d^2k'}{dydz}\right)uv\right\}-$$

$$-\left(\frac{d\alpha'}{dx}+k\frac{d\alpha'}{dy}+k'\frac{d\alpha'}{dz}+\alpha\frac{dk'}{dy}+\alpha'\frac{dk'}{dz}\right).$$

Ponendo:

$$\beta=\frac{dk}{dy}l+\frac{dk}{dz}l',\quad \beta'=\frac{dk'}{dy}l+\frac{dk'}{dz}l',\;\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\gamma_1=\frac{d\alpha}{dy}+2\frac{d^2k}{dy^2}l+2\frac{d^2k}{dydz}l'+2\left(\frac{dk}{dy}\frac{dl}{dy}+\frac{dk'}{dy}\frac{dl}{dz}\right),$$

$$\gamma_2=\frac{d\alpha}{dz}+2\frac{d^2k}{dydz}l+2\frac{d^2k}{dz^2}l'+2\left(\frac{dk}{dz}\frac{dl}{dy}+\frac{dk'}{dz}\frac{dl}{dz}\right),$$

$$\gamma_1'=\frac{d\alpha'}{dy}+2\frac{d^2k'}{dy^2}l+2\frac{d^2k'}{dz^2}l'+2\left(\frac{dk}{dy}\frac{dl'}{dy}+\frac{dk'}{dy}\frac{dl'}{dz}\right),$$

$$\gamma_2'=\frac{d\alpha'}{dz}+2\frac{d^2k'}{dydz}l+2\frac{d^2k'}{dz^2}l'+2\left(\frac{dk}{dz}\frac{dl'}{dy}+\frac{dk'}{dz}\frac{dl'}{dz}\right),$$

si ha:

$$C(u)-2B(n)=3\left(\frac{d^2k}{dy^2}u^2+\frac{d^2k}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k}{dy\,dz}uv\right)+\alpha+2\beta,$$

$$C(v)-2B(n')=3\left(\frac{d^2k}{dy^2}u^2+\frac{d^2k'}{d\,z^2}v^2+2\frac{d^2k'}{dy\,dz}uv\right)+\alpha'+2\beta',$$

$$C(l)-B(p)=-\left\{\frac{d^3k}{dy^3}u^3+\frac{d^3k}{d\,z^3}v^3+3\frac{d^3k}{dy^2dz}u^2v+3\frac{d^3k}{dydz^2}uv^2+\gamma_1u+\gamma_2v\right\},$$

$$C(l')-B(p')=-\left\{\frac{d^3k'}{dy^3}u^3+\frac{d^3k'}{d\,z^3}v^3+3\frac{d^3k'}{dy^2dz}u^2v+3\frac{d^3k'}{dydz^2}uv^2+\gamma'_1u+\gamma'_2v\right\}.$$

Affinchè esistano tre soluzioni occorre che le (3), (4) o siano identicamente soddisfatte, oppure una identicamente soddisfatta e l'altra conseguenza della (2) e delle (5), (6) del §. IX, oppure tutte e due conseguenze di queste.

Considereremo separatamente i quattro casi che si presentano.

XII.

Primo sistema.

Supponiamo le (XI, 3, 4) identicamente soddisfatte. Si ha allora:

$$\frac{d^2k}{dy^2}=\frac{d^2k}{dz^2}=\frac{d^2k}{dydz}=\frac{d^2k'}{dy^2}=\frac{d^2k'}{dz^2}=\frac{d^2k'}{dydz}=0,$$

$$\left(\frac{dk}{dy}\right)^2+\frac{dk'}{dy}\frac{dk}{dz}=\frac{dk}{dz}\frac{dk}{dy}+\frac{dk'}{dz}\frac{dk}{dz}=0,$$

$$\frac{dk}{dy}\frac{dk'}{d\,y}+\frac{dk'}{dy}\frac{dk}{dz}=\frac{dk}{dz}\frac{dk'}{dy}+\left(\frac{dk'}{dz}\right)^2=0,\quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+2\beta=\alpha'+2\beta'=0 \ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\alpha}{dy}+2\left(\frac{dk}{dy}\frac{dl}{dy}+\frac{dk'}{dy}\frac{dl}{dz}\right)=\frac{d\alpha}{dz}+2\left(\frac{dk}{dz}\frac{dl}{dy}+\frac{dk'}{dz}\frac{dl}{dz}\right)=0 \\ \frac{d\alpha'}{dy}+2\left(\frac{dk}{dy}\frac{dl'}{dy}+\frac{dk'}{dy}\frac{dl'}{dz}\right)=\frac{d\alpha'}{dz}+2\left(\frac{dk}{dz}\frac{dl'}{dy}+\frac{dk'}{dz}\frac{dl'}{dz}\right)=0.\end{array}\right\}(2)$$

Dalle (1) e dalle (II, 11) si deduce facilmente:

$$k=ax+by+cz+d \quad , \quad k'=-\frac{a+bk}{c} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Queste riducono le (2) a quattro sole equazioni distinte, le quali ponendo:

$$bl+cl'=L \text{ , ossia (I, 1): } \quad aX+bY+cZ=L$$

prendono la forma:

$$\frac{dl}{dx}+k\frac{dl}{dy}+k'\frac{dl}{dz}+3L=0 \text{ , } c^2\frac{dl'}{dy}+b^2\frac{dl}{dz}=0 \ldots (4)$$

$$\frac{1}{a}\frac{dL}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dL}{dy}=\frac{1}{c}\frac{dL}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Posto:

$$\omega=ax+by+cz\,,$$

si ha dunque per le (5), indicando con π una funzione arbitraria:

$$bl+cl'=\pi(\omega) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

La prima delle (4) prendendovi per variabili ω, y, z

diviene:

$$\frac{dl}{dy}(\omega+d)-\frac{1}{c}\left\{a+b(\omega+d)\right\}\frac{dl}{dz}+3\pi(\omega)=0\,;$$

integrando e indicando con φ una funzione arbitraria:

$$l=\frac{-3\pi(\omega)y+\varphi(\rho\,,\,\omega)}{\omega+d}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(7)$$

dove:

$$\rho=\frac{ay+(\omega+d)\,(by+cz)}{c}\,.$$

Dalle (6) si ha dunque:

$$l'=\frac{(\omega+d+3by)\pi(\omega)-b\,\varphi(\rho\,,\,\omega)}{c(\omega+d)}\,.$$

L'ultima delle (4) è identicamente soddisfatta dagli attuali valori di l , l' , purchè φ abbia la forma:

$$\varphi(\rho\,,\,\omega)=\frac{c}{a}\left\{3\pi(\omega)+(\omega+d)\,\pi'(\omega)\right\}\rho+\frac{\omega+d}{a}f(\omega)\,,\quad(8)$$

essendo $f(\omega)$ una funzione arbitraria di ω.

La condizione per le forze che si ha dalla (6), ed i due integrali sono quelli trovati nel §. III. eq: (13, 14, 15).

La (7), tenendo conto della (8), dà una seconda condizione per le forze:

$$a\left(Y-(\omega+d)X\right)=f(\omega)+3(by+cz)\pi(\omega)+\pi'(\omega)\left\{ay+(by+cz)(\omega+d)\right\}\;(9$$

Ma pei valori ora trovati per α, α', k, k' ecc. la (XI, 2) diviene:

$$(bu+cv)\left(c\frac{dF}{dy}-b\frac{dF}{dz}\right)+\pi(\omega)\left(c\frac{dF}{du}-b\frac{dF}{dv}\right)=0,$$

e se per brevità poniamo:

$$by+cz=\mu\ ,\ bu+cv=\nu\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

introducendovi le variabili μ,ν in luogo di z e v, questa prende la forma:

$$\nu\frac{dF}{dy}+\pi(\omega)\frac{dF}{du}=0,$$

per cui se si pone:

$$\lambda=\nu u-\pi(\omega)\,y,$$

l' integrale generale prenderà la forma:

$$\lambda=F(\mu\ ,\nu\ ,\omega\ ,t),$$

ove F è simbolo di funzione arbitraria.

La (IX, 5) si trasforma ora nella seguente:

$$a\frac{dF}{d\mu}+\left\{(\omega+d)\,\pi(\omega)+\nu^2\right\}\frac{dF}{d\lambda}=0\ ,$$

onde posto:

$$a\lambda-\left\{(\omega+d)\,\pi(\omega)+\nu^2\right\}\mu=\sigma,$$

l' integrale generale di quella equazione avrà la forma:

$$\sigma = F(\nu, \omega, t),$$

per cui ogni integrale della (IX, 5) è ora integrale anche della (XI, 2).

La (IX, 6) si trasforma allora nella seguente:

$$\frac{dF}{dt} + \nu \frac{dF}{d\omega} + \pi(\omega) \frac{dF}{d\nu} + \nu \left[f(\omega) - (\omega + d)\, \pi(\omega) - \nu^2 \right] \frac{dF}{d\sigma} = 0$$

che è soddisfatta, oltre che dai due integrali già ottenuti, anche dall'integrale della equazione:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = f(\omega) - (\omega + d)\, \pi(\omega) - \nu^2 ,$$

cioè, a causa della (III, 14), dall' integrale della equazione:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = f(\omega) - (\omega + d)\, \pi(\omega) - (\alpha + 2 \int \pi(\omega)\, d\omega).$$

Indicando con γ una costante, il terzo integrale comune è adunque:

$$\sigma + \alpha\omega - \int \left\{ f(\omega) - (\omega + d)\, \pi(\omega) - 2 \int \pi(\omega)\, d\omega \right\} d\omega = \gamma,$$

ossia ritornando alle variabili primitive:

$$a\left\{\left(y'-(\omega+d)x'\right)(ax'+by'+cz')-\pi(\omega)y\right\}$$

$$-(by+cz)\left\{(\omega+d)\pi(\omega)+(ax'+by'+cz')^2\right\}+\alpha\omega$$

$$-\int\left\{f(\omega)-(\omega+d)\pi(\omega)-2\int\pi(\omega)d\omega\right\}d\omega=\gamma. \quad \ldots (11)$$

XIII.

Secondo sistema.

Supponiamo ora che una delle (XI, 3, 4) sia identicamente soddisfatta e l'altra sia conseguenza delle primitive; è facile vedere che le (5), (6) del §. (IX.) contengono ciascuna una derivata che non apparisce nelle (XI, 3, 4): una qualunque di queste potrà dunque essere conseguenza delle primitive soltanto quando i suoi coefficienti siano proporzionali ai coefficienti della (XI, 2). Ciò posto, sia la (XI, 3) identicamente soddisfatta e l'altra conseguenza delle primitive. Sviluppando l'equazione:

$$\frac{C(u)-2B(n)}{n}=\frac{C(v)-2B(n')}{n'},$$

se ne deduce, affinchè questa sia identicamente soddisfatta, che dèbbono aver luogo le equazioni:

$$\frac{\frac{dk}{dy}}{\frac{dk'}{dy}}=\frac{\frac{dk}{dz}}{\frac{dk'}{dz}}=\frac{\frac{d^2k}{dy^2}}{\frac{d^2k'}{dy^2}}=\frac{\frac{d^2k}{dz^2}}{\frac{d^2k'}{dz^2}}=\frac{\frac{d^2k}{dy\,dz}}{\frac{d^2k'}{dy\,dz}}=\frac{\alpha+2\beta}{\alpha'+2\beta'}.$$

Da queste, dalle (II, 11) e dalle posizioni (IX, 4), (XI, 5) si trae, indicando con a, b, c tre costanti:

$$k' = -\frac{a+bk}{c} \dots (1), \quad \alpha' = -\frac{b}{c}\alpha \dots (2), \quad \beta' = -\frac{b}{c}\beta, \quad p' = -\frac{b}{c}p \dots (3)$$

Quindi la (XI,. 3) diviene:

$$\left(c\frac{dk}{dy} - b\frac{dk}{dz}\right)\left(\frac{dk}{dy}u + \frac{dk}{dz}v\right)\left(c\frac{dF}{dy} - b\frac{dF}{dz}\right)$$
$$-\left\{A_1\frac{dk}{dy}u^2 + A_2\frac{dk}{dz}v^2 + \left(A_2\frac{dk}{dy} + A_1\frac{dk}{dz}\right)uv\right\}\left(c\frac{dF}{du} - b\frac{dF}{dv}\right) = 0 \dots (4)$$

dove:

$$A_1 = \frac{d}{dy}\left(c\frac{dk}{dy} - b\frac{dk}{dz}\right), \quad A_2 = \frac{d}{dz}\left(c\frac{dk}{dy} - b\frac{dk}{dz}\right).$$

Ora questa deve essere identicamente soddisfatta, e ciò si otterrà col porre:

$$c\frac{dk}{dy} - b\frac{dk}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

e questa insieme alla (1) riduce la prima delle (II, 11) alla relazione:

$$c\frac{dk}{dx} - a\frac{dk}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

I termini in u^4, v^4, u^3v, u, v e i termini indipendenti da u, v del primo membro dell'equazione:

$$\frac{C(u) - 2B(n)}{2n} - \frac{C(l) - B(p)}{p} = 0 \quad . \; . \quad (7)$$

uguagliati a zero danno:

$$3\left(\frac{d^2k}{dy^2}\right)^2=2\frac{dk}{dy}\frac{d^3k}{dy^3}\ldots(8);\ 3\left(\frac{d^2k}{dz^2}\right)^2=2\frac{dk}{dz}\frac{d^3k}{dy^3}\ldots(9);$$

$$6\frac{d^2k}{dy^2}\frac{d^2k}{dydz}=3\frac{d^3k}{dy^2dz}\frac{dk}{dz}+\frac{d^3k}{dy^3}\frac{dk}{dz}\ldots(10);$$

$$(2\alpha+\beta)\frac{d^2k}{dy^2}=\frac{dk}{dy}\gamma_1;\ (2\alpha+\beta)\frac{d^2k}{dz^2}=\frac{dk}{dz}\gamma_2\ldots(11);\ \alpha=0\ldots(12).$$

Le (9) e (10) sono conseguenza delle (5), (8); le due equazioni (11) a causa della (5) e della (12) sono fra loro equivalenti. L'integrale generale della (8) è

$$k=\frac{1}{\varphi(x,z)y+\psi(x,z)}+\chi(x,z)$$

Sostituendo questa espressione di k nelle (5), (6) si trovano due equazioni, ciascuna delle quali non è identicamente soddisfatta qualunque sia y a meno che non si scinda in due altre, le quali permettono di determinare le tre funzioni arbitrarie φ, ψ, χ. Si trova allora, se a, b, c, d, f, g sono sei costanti, che l'espressione più generale di k è:

$$k=\frac{f}{ax+by+cz+d}+g\ldots(13)$$

Per le (1), (2), (3) l'equazione:

$$\frac{C(l)-B(p)}{p}=\frac{C(l')-B(p')}{p'}\ldots(14)$$

è identicamente soddisfatta, se si ha:

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{dL}{dy}=\frac{1}{c}\cdot\frac{dL}{dz}\,\ldots\ldots\ldots\,(15)$$

dove L ha lo stesso significato che nel §. XII. Dalle equazioni $\alpha=o$, $\alpha'=o$ conseguenze della (12) e della (2) si ricava, ponendo mente alla (1):

$$\frac{dL}{dx}+k\frac{dL}{dy}+k'\frac{dL}{dz}=o$$

e quindi per la (15):

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{dL}{dx}=\frac{1}{c}\cdot\frac{dL}{dz}\,\ldots\ldots\ldots\,(16)$$

onde, come nel §. precedente e dando ad ω lo stesso significato che aveva allora:

$$L=\pi(\omega)\,\ldots\ldots\ldots\,(17)$$

Sviluppando la (2) e prendendo ω, y, z per variabili indipendenti si ha:

$$k\frac{dl}{dy}+k'\frac{dl}{dz}=\frac{f\pi(\omega)}{(\omega+d)^2},$$

la quale integrata dà:

$$l=\frac{\varphi(\rho,\omega)+f\pi(\omega)y}{\left\{f+g(\omega+d)\right\}(\omega+d)}\,\ldots\ldots\ldots\,(18)$$

dove si è posto:

$$\rho=(by+cz)\Big(f+g(\omega+d)\Big)+(\omega+d)ay\,.$$

La prima delle (11), osservando che si ha: $\beta=-f\frac{\mathrm{L}}{(\omega+d)^2}$, diviene:

$$2bf\frac{\pi(\omega)}{(\omega+d)^3}-\gamma_1=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(19)$$

Ma per le posizioni del §. XI e per i valori attuali di k, k', considerando ω, ρ, y come variabili indipendenti in luogo di x, y, z, si ha:

$$\gamma_1=\frac{4bf\pi(\omega)}{(\omega+d)^3}-\frac{2bf}{(\omega+d)^3}\left(\frac{dl}{dy}+a(\omega+d)\frac{dl}{d\rho}\right)\,.$$

Sostituendo in questa per $\frac{dl}{dy}$ e $\frac{dl}{d\rho}$ i loro valori tratti dalla (18), e quindi sostituendo questo valore di γ_1 nella (19), questa diviene:

$$\frac{d\varphi}{d\rho}=\frac{g}{a}\pi(\omega)\,.$$

Quindi si può porre:

$$\varphi=\frac{g}{a}\pi(\omega)\rho+\frac{1}{a}\psi(\omega)\,,$$

e la (18) diviene:

$$l = \frac{\psi(\omega) + \pi(\omega)\Big(f+g(\omega+d)\Big)\Big(ay+g(by+cz)\Big)}{a(\omega+d)\Big(f+g(\omega+d)\Big)} .$$

Per le (15), (16) si hanno ancora la condizione e gl'integrali (III, 13, 14, 15). La seconda condizione per le forze è:

$$a\Big\{f+g(\omega+d)\Big\}\Big\{(\omega+d)\mathrm{Y}-\Big(f+g(\omega+d)\Big)\mathrm{X}\Big\}$$
$$= \psi(\omega) + \pi(\omega)\Big(f+g(\omega+d)\Big)\Big(ay+g(by+cz)\Big) .$$

Le (IX, 5, 6), (XI, 2) formano ora un sistema completo. La terza diviene, introducendovi come variabile ω in luogo di x:

$$(\omega+d)\left(c\frac{d\mathrm{F}}{dy}-b\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)+(bu+cv)\left(c\frac{d\mathrm{F}}{du}-b\frac{d\mathrm{F}}{dv}\right)=\mathrm{o},$$

onde, oltre le (XII, 10), ponendo:

$$(\omega+d)\,u - v\,y = \lambda,$$

l'integrale generale avrà la forma:

$$\lambda = \mathrm{F}(\mu, \nu, \omega, t).$$

La (IX, 5), sostituendovi alle variabili x, y, z, u, v le variabili μ, ν, λ, ω, diviene:

$$a \frac{dF}{d\mu} + g\nu \frac{dF}{d\lambda} = o,$$

la quale ha per integral generale:

$$\sigma = F(\omega, \nu, t)$$

dove si è posto:

$$a\lambda - g\mu\nu = \sigma.$$

La (IX, 6) diviene allora:

$$\frac{dF}{dt} + \frac{dF}{d\omega}\nu + \frac{dF}{d\nu}\pi(\omega) + \frac{dF}{d\sigma}\left(\frac{\psi(\omega)}{f+g(\omega+d)} - g\nu^2\right) = o,$$

onde il terzo integrale comune è:

$$\tau + \int \left\{ g\sqrt{\alpha + 2\int\pi(\omega)\,d\omega} - \frac{\psi(\omega)}{\left(f+g(\omega+d)\right)\sqrt{\alpha+2\int\pi(\omega)d\omega}} \right\} d\omega = \gamma \ldots (20)$$

dove per le precedenti posizioni si ha:

$$\sigma = a\left\{(\omega+d)y' - \left(f+g(\omega+d)\right)x'\right\} - (ax'+by'+cz')\left(ay+g(by+cz)\right)$$

XIV.

Terzo sistema.

Sia la (XI, 4) identicamente soddisfatta, e i coefficienti delle derivate parziali di F nelle (XI, 2, 3) siano fra loro

proporzienali. Dalla prima identità si deduce che le derivate seconde di k e k' rapporto a y e z sono nulle, e inoltre:

$$\alpha+2\beta=\alpha'+2\beta'=0\ldots(1)\ ;\ \gamma_1=\gamma_2=\gamma'_1=\gamma'_2=0\ldots(2),$$

Intanto si può porre:

$$k=\varphi(x)y+\psi(x)z+\pi(x)\ldots(3)\ ;\ k'=\varphi_1(x)y+\psi_1(x)z+\pi_1(x)\ldots(4).$$

La proporzionalità dei coefficienti delle (XI, 2, 3) dà anzitutto:

$$\frac{\mathrm{C}\,(k)-2\,\mathrm{A}\,(n)}{n}=\frac{\mathrm{C}\,(k')-2\,\mathrm{A}\,(n')}{n'},$$

da cui si trae:

$$\frac{d^2k}{dx\,dy}\frac{dk'}{dy}=\frac{d^2k'}{dx\,dy}\frac{dk}{dy}\ ;\ \frac{d^2k}{dx\,dz}\frac{dk'}{dz}=\frac{d^2k'}{dx\,dz}\frac{dk}{dz}\ ;$$

$$\frac{d^2k}{dx\,dy}\frac{dk'}{dz}+\frac{d^2k}{dx\,dz}\frac{dk'}{dy}=\frac{d^2k'}{dx\,dy}\frac{dk}{dz}+\frac{d^2k'}{dx\,dz}\frac{dk}{dy}.$$

Sostituendo le espressioni di k e k' nella prima e nella seconda, se ne deduce:

$$\varphi_1(x)=c\,\varphi(x)\ ,\qquad \psi_1(x)=c_1\psi(x)\ldots\ldots(5).$$

Quindi la terza diviene:

$$(c-c_1)\Big(\varphi'(x)\,\psi(x)-\varphi(x)\,\psi'(x)\Big)=0\ldots\ldots(6).$$

Quindi o $c=c_1$ oppure $\varphi=c_2\,\psi$; consideriamo da prima

il primo caso; allora si ha dalle (II, 11): $\frac{d(ck-k')}{dx}=0$, quindi $k'=kc+c_3$: ponendo uguali a zero i coefficienti di y e z ed il termine indipendente da queste variabili dell'una o dell'altra delle (II, 11), si ha facilmente colla integrazione:

$$k=\frac{ax+(b+1)y+cz+d}{m+x}, \quad k'=-\frac{1}{c}(a+bk) \quad . . (7)$$

Nel caso in cui si abbia $\varphi=c_2\psi$ dalle (II, 11) si rileva, ponendo uguali a zero i coefficienti di y, z ed il termine noto, che deve essere $c=c_1$; infatti i coefficienti di y e z nella prima danno resp.

$$\varphi'+\varphi^2+\frac{c}{c_2}\varphi^2=0 \quad , \quad \varphi'+\varphi^2+\frac{c_1}{c_2}\varphi^2=0;$$

quindi si vede che questo caso rientra nel precedente.

Le (1), (2) avuto riguardo alle (7) danno luogo, alle (XII, 5, 6), ed anche alle seguenti:

$$\frac{dl}{dx}+k\frac{dl}{dy}+k'\frac{dl}{dz}+3\left(\frac{dk}{dy}l+\frac{dk}{dz}l'\right)=0 \quad . . (8)$$

$$c^2\frac{dl'}{dy}+b(b+1)\frac{dl}{dz}=0 \quad . . . . . . (9)$$

La (8) prendendovi per variabili ω, y, z diviene:

$$(\omega+y+d)\frac{dl}{dy}-\frac{1}{c}\left\{(b+1)\,\omega-cz+am+bd\right\}\frac{dl}{dz}=-3(\pi(\omega)+l).$$

Quindi:

$$l = -\pi(\omega) + \frac{\varphi(\rho, \omega)}{(\omega + y + d)^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dove è

$$\rho = \frac{(b+1)\omega - cz + am + bd}{\omega + y + d} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

E sostituendo nella (XII, 6):

$$l' = \frac{b+1}{c}\,\pi(\omega) - \frac{\varphi(\rho, \omega)}{(\omega + y + d)^3} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

È facile vedere che i valori (10), (12) non possono soddisfare alla (9) a meno che φ non sia una costante C.

Le espressioni così trovate per k, k', l, l' riducono completo il sistema (IX, 5, 6; XI, 2), prendendo per μ, ν le espressioni date nel §. XII (10), ponendo

$$2\nu u + u^2 + \frac{C}{(\omega + y + d)^2} = \lambda, \quad (\mu - \omega - am)^2 (\lambda + \nu^2) = \sigma,$$

ed operando come alla fine dei §§. XII. e XIII. avremo oltre le (III, 13, 14, 15), per terzo integrale:

$$\sigma = \gamma,$$

ossia:

$$C\left(\frac{x + m}{\omega + y + d}\right)^2 + \left[(ax' + (b+1)y' + cz')(x + m) - (\omega + y + d)x'\right]^2 = \gamma \ldots (1$$

e la seconda condizione per le forze sarà:

$$\mathrm{Y}-\frac{\omega+y+d}{m+x}\mathrm{X}=-\pi(\omega)+\frac{\mathrm{C}}{(\omega+y+d)^3}\quad \ldots\ldots (15)$$

XV.

Quarto Sistema.

Siano infine i coefficienti delle derivate parziali di F nelle (XI, 2, 3, 4) proporzionali fra loro. La proporzionalità dei detti coefficienti nelle (XI, 2, 4), supposta anche nel § XIII, dà luogo alle equazioni (XIII, 1-3, 7-12, 14-17). La proporzionalità dei coefficienti nelle (XI, 3, 4) dà ora luogo alla unica equazione:

$$\left(c\frac{dk}{dy}-b\frac{dk}{dz}\right)\left(\frac{d^2k}{dy^2}u^2+\frac{d^2k}{dz^2}v^2+2\frac{d^2k}{dy\,dz}uv\right)=$$

$$=2\left\{\mathrm{A}_1\frac{dk}{dy}u^2+\mathrm{A}_2\frac{dk}{dz}v^2+\left(\frac{dk}{dy}\mathrm{A}_2+\frac{dk}{dz}\mathrm{A}_1\right)uv\right\}\ldots (1)$$

avendo A_1 e A_2 lo stesso significato che nel § XIII.

Uguagliando fra loro i coefficienti di u^2 e v^2 nella (1) si ha:

$$\frac{\dfrac{d^2k}{dy^2}}{\dfrac{dk}{dy}}=\frac{2\dfrac{d}{dy}\left(c\dfrac{dk}{dy}-b\dfrac{dk}{dz}\right)}{c\dfrac{dk}{dy}-b\dfrac{dk}{dz}}\;;\quad \frac{\dfrac{d^2k}{dz^2}}{\dfrac{dk}{dz}}=\frac{2\dfrac{d}{dz}\left(c\dfrac{dk}{dy}-b\dfrac{dk}{dz}\right)}{c\dfrac{dk}{dy}-b\dfrac{dk}{dz}}.$$

Integrando, e indicando con φ_2 e φ_3 funzioni arbitrarie:

$$\frac{dk}{dy}=\varphi_2(x,z)\left(c\frac{dk}{dy}-b\frac{dk}{dz}\right)^2;\quad \frac{dk}{dz}=\varphi_3(x,y)\left(c\frac{dk}{dy}-b\frac{dk}{dz}\right)^2,$$

donde:

$$\frac{dk}{dy}=\frac{\varphi_2(x, z)}{\Delta^2}, \quad \frac{dk}{dz}=\frac{\varphi_3(x, y)}{\Delta^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

dove:

$$\Delta = c\,\varphi_2(x, z) - b\,\varphi_3(x, y).$$

Sostituendo questi valori nelle (XIII, 8, 9), si deduce:

$$\frac{d^2\Delta}{dy^2}=\frac{d^2\Delta}{dz^2}=0,$$

onde:

$$\varphi_2(x, z)=\psi(x)\,z+\psi_1(x) \quad , \quad \varphi_3(x, z)=\pi(x)\,y+\pi_1(x),$$

dove sarà pure:

$$\pi(x)=\psi(x)=0,$$

affinchè i secondi membri delle (2) possano essere derivate d'una stessa funzione, ed affinchè la (XIII, 10) sia identicamente soddisfatta.

In ultimo per soddisfare alle (II, 11) se a, b, c, d sono costanti, è, come nel § XIV:

$$k=\frac{ax+(b+1)\,y+cz+d}{x+m}.$$

Per le (XIII, 11) si ha dunque:

$$\gamma_1=\gamma_2=0$$

da cui e dalla (XIII, 12) si ottiene:

$$c\frac{dl}{dy}=b\frac{dl}{dz}\dots\dots\dots\dots\quad(5)$$

onde la (XIII, 12) diviene:

$$\frac{dl}{dx}-\frac{a}{c}\frac{dl}{dz}+\frac{(b+1)\,l+c\,l'}{x+m}=0\dots\quad(6)$$

ossia per la (XIII, 17), prendendovi per variabili indipendenti ω, y, z in luogo di x, y, z:

$$\frac{dl}{dz}-\frac{c}{\omega-by-cz+am}\,l=\frac{c\,\pi(\omega)}{\omega-by-cz+am}.$$

Integrando, e indicando con φ una funzione arbitraria si ha:

$$l=\frac{c\,\pi(\omega)\,z+\varphi(\omega\,,y)}{\omega-by-cz+am},$$

o più particolarmente per soddisfare alla (5):

$$l=\frac{\pi(\omega)\,(by+cz)+f(\omega)}{\omega-by-cz+am}.$$

Una condizione per le forze e due integrali sono le (III, 13, 14, 15). La seconda condizione è:

$$a\Big\{(x+m)\mathrm{Y}-\Big(ax+(b+1)y+cz+d\Big)\mathrm{X}\Big\}=\pi(\omega)(by+cz)+f(\omega).$$

Il sistema (IX, 5, 6; XI, 2) si verifica ora completo,

ed ha le tre soluzioni della equazione:

$$\frac{dF}{dt}+\nu\frac{dF}{d\omega}+\pi(\omega)\frac{dF}{d\nu}-\left\{\omega\,\pi(\omega)+f(\omega)\right\}\frac{dF}{d\lambda}=0,$$

avendo posto, oltre le (XII, 10) anche:

$$(\mu-\omega-am)(u+v)=\lambda.$$

Il terzo integrale è adunque:

$$\int\frac{\pi(\omega)\omega+f(\omega)}{\sqrt{\alpha+2\int\pi(\omega)\,d\omega}}d\omega-a(x+m).$$

$$\left[\left(a-\frac{ax+(b+1)y+cz+d}{x+m}\right)x'+(b+1)y'+cz'\right]=\gamma.$$

Dott. Giovanni Pennacchietti.

SULLE SUPERFICIE APPLICABILI

ESTRATTO DELLA DISSERTAZIONE DI LAUREA

DI

LUIGI BIANCHI

Alunno della R. Scuola N. S.

In questo lavoro espongo alcuni resultati che io detti nella tesi da me presentata per la laurea alla R. Università di Pisa. I primi di questi risultati sono relativi alla deformazione di alcune classi di superficie di rivoluzione, di superficie elicoidali e di quelle che hanno un sistema di linee di curvatura in piani paralleli. Gli ultimi riguardano un problema che in un caso particolare fu studiato dal Codazzi, e il metodo che espongo per la risoluzione di esso, viene applicato allo studio di particolari deformazioni delle superficie *moulures* del Monge e delle superficie di rivoluzione.

Sopra due classi di superficie gobbe.

1. — Sia una curva gobba C e consideriamo la superficie gobba generata da una retta, che si appoggia alla curva

normalmente alla normale principale, facendo un angolo costante θ colla curva stessa. Indichiamo con x, y, z le coordinate correnti di un punto della curva C espresse per l'arco u della curva stessa; indichiamo poi rispettivamente con α, β, γ ; ξ, η, ς ; λ, μ, ν i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale con R, T i raggi di prima e seconda curvatura. Chiamiamo poi X, Y, Z le coordinate correnti di un punto della superficie gobba generata e con v la lunghezza variabile di generatrice, contata a partire dalla Curva C. Si vedrà facilmente che X, Y, Z sono date dalle formule seguenti:

$$X = x + v(\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\lambda)$$

$$Y = y + v(\cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\mu)$$

$$Z = z + v(\cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\nu)$$

Derivando ed avendo riguardo a note formule (V. Serret. Calcul. Differentiel. §. 274) si otterrà:

$$\frac{dX}{du} = \cos\alpha + v\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)\cos\xi \,,\quad \frac{dX}{dv} = \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\lambda$$

$$\frac{dY}{du} = \cos\beta + v\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)\cos\eta \,,\quad \frac{dY}{dv} = \cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\mu$$

$$\frac{dZ}{du} = \cos\gamma + v\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)\cos\varsigma \,,\quad \frac{dZ}{dv} = \cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\nu$$

quindi l'elemento lineare ds della superficie in considerazione sarà dato dalla formula:

$$ds^2 = \left\{1 + v^2\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)^2\right\}du^2 + 2\cos\theta\, dv\, du + dv^2.$$

Ma questo elemento lineare non varia finchè θ e $\frac{\cos\theta}{R}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}$ restano invariati; possiamo quindi enunciare il teorema: « Se si hanno due curve C , C′ e per ciascuna di esse si considera la superficie gobba generata da una retta, che si appoggia alla curva normalmente alla normale principale e fa un angolo costante θ colla curva, le due superficie generate saranno applicabili l' una sull' altra, quando fra i raggi R , T di prima e seconda curvatura di C e quelli R′ , T′ di C′ abbia luogo la relazione

$$(1) \qquad \frac{\cos\theta}{R}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}=\frac{\cos\theta}{R'}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T'} »$$

Evidentemente data la curva C e fissati conseguentemente R ; T vi sono infinite curve C′, che soddisfano la condizione (1), e quindi la nostra superficie S, generata nel modo suddetto colla curva C, può in infiniti modi deformarsi in altre superficie generate nello stesso modo rispetto alle trasformate di C.

Se nel teorema precedente si suppone $\theta=\frac{\pi}{2}$, si avrà un noto teorema sulle superficie delle binormali delle curve gobbe.

Fra le infinite trasformate C′ della curva primitiva C figurerà una curva piana, il cui raggio di curvatura R′ sarà dato dalla formula:

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R}+\frac{\operatorname{tang}\theta}{T} .$$

Per es. se la curva C è un' elica circolare, la trasformata piana è un cerchio; quindi « La superficie della classe considerata, avente a direttrice un' elica circolare, è appli-

cabile sull' iperboloide di rivoluzione ad una falda ». Quando si osservi che nel caso dell' elica circolare la superficie generata è un elicoide, il teorema precedente si potrà enunciare sotto una forma già conosciuta (v. per es. Bour Théorie de la déformation des surfaces §. 36, Journal de l' École. Polytechnique 1862).

2 — Quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ la somma delle due curvature non varia nei punti corrispondenti delle successive deformate; osserviamo inoltre che in tal caso si può soddisfare alla (1) prendendo:

$$R' = T \quad , \quad T' = R$$

sicchè possiamo dire « Se due curve C , C' sono tali che il raggio di 1.ª curvatura di una qualunque di esse sia eguale al raggio di 2.ª curvatura dell' altra, le superficie gobbe generate per ciascuna di esse da una retta, che appoggiandosi alla curva biseca l'angolo della tangente e della binormale sono applicabili l'una sull' altra ».

Evvi una classe di curve per le quali il teorema enunciato acquista un significato degno di considerazione.

È noto che, se si considera la curva C_0 luogo dei centri delle sfere osculatrici di C e si indicano rispettivamente con u_0 , R_0 , T_0 l' arco ed i raggi di 1.ª e 2.ª curvatura di C_0 si hanno le formule (Serret. Cal. Dif. §. 292)

$$du_0 = \pm \left\{ \frac{R}{T} + \frac{d}{du}\left(T \frac{dR}{du} \right) \right\} du$$

$$\frac{du_0}{T_0} = \frac{du}{R} \; , \; \frac{du_0}{R_0} = \frac{du}{T}$$

Quando fra R , T abbia luogo la relazione differenziale:

$$(2)\qquad \frac{R}{T}+\frac{d}{du}\left(T\frac{dR}{du}\right)=\pm 1$$

si avrà:

$$T_0=R\ ,\ R_0=T$$

e però il teorema enunciato dà luogo al seguente « Se dai vari punti di una curva gobba C, i cui raggi di curvatura soddisfano la (2), si conducono le bisettrici dell'angolo della tangente e della binormale la superficie generata è applicabile su quella generata nello stesso modo colla curva luogo dei centri delle sfere osculatrici ».

È anche da osservare che in tal caso (V. Serret l. c.) le generatrici corrispondenti delle due superficie sono parallele.

3. — Da ogni punto di una curva gobba C conduciamo una retta normale alla curva e inclinata di un angolo costante sulla normale principale e cerchiamo l'elemento lineare ds della superficie gobba così generata. Facendo uso delle stesse notazioni precedentemente usate, avremo:

$$X=x+v(\cos\theta\cos\xi+\operatorname{sen}\theta\cos\lambda$$

$$Y=y+v(\cos\theta\cos\eta+\operatorname{sen}\theta\cos\mu$$

$$Z=z+v(\cos\theta\cos\zeta+\operatorname{sen}\theta\cos\nu),$$

dove θ indica l'angolo costante delle generatrici della superficie colla normale principale di C. Derivando ed avendo riguardo alle formule del Serret si troverà subito

$$ds^2=\left\{\left(1-\frac{v\cos\theta}{R}\right)^2+\frac{v^2}{T^2}\right\}du^2+dv^2\ .$$

Osservando che questo elemento lineare non varia finchè T e $\frac{\cos\theta}{R}$ restano invariati, si ha subito il seguente teorema « Se si hanno due curve C, C' aventi la stessa torsione, e tali di più che il rapporto delle loro prime curvature sia una costante, le due superficie gobbe, generate per ciascuna di esse da una retta che, appoggiandosi alla curva normalmente alla curva stessa, fa colla normale principale un angolo costante θ per C e un angolo pur costante θ' per C', saranno applicabili l'una sull'altra, quando θ, θ' siano legati dalla relazione

$$(3) \qquad \frac{\cos\theta}{\cos\theta'}=\frac{R}{R'} \text{ »}$$

Possiamo quindi dire che, data una superficie S generata nel modo del teorema con una curva C, se ne può ottenere un numero infinito applicabili su di essa conservando in ciascun punto alla curva C invariata la sua torsione, e variando in dato rapporto la sua prima curvatura.

Se supponiamo dati θ ed R possiamo dare a θ' qualunque valore, escluso $\frac{\pi}{2}$ ed allora dalla (3) si ha il valore conveniente di R'; in particolare possiamo prendere $\theta'=o$ e allora la superficie deformata è quella delle normali principali della trasformata di C.

Se la curva C è un'elica cilindrica le sue trasformate (nel senso del teorema, sono altrettante eliche cilindriche e i cilindri, su cui esse sono tracciate, sono tutti della stessa natura. Più particolarmente, se C è un elica circolare tutte le sue trasformate sono eliche circolari e fra queste ve ne ha una per la quale $\theta'=o$, e siccome la su-

perficie delle normali principali di un'elica circolare è un elicoide gobbo ad area minima possiamo enunciare il teorema « Una retta che si appoggia normalmente ad un'elica « circolare e fa un angolo costante colla normale principale « genera una superficie applicabile sull'elicoide gobbo ad « area minima ».

Questo teorema era già noto (Dini, Annali di Tortolini Tomo VII; 1864, pag. 33); ma come caso particolare del teorema generale dimostrato possiamo per es. enunciare anche il seguente « Una retta che si appoggia normalmente « ad un'elica cilindro-conica e fa un angolo costante colla « normale principale genera una superficie applicabile sulla « superficie delle normali principali di un'altra elica cilin- « dro conica ».

Sulle superficie di rivoluzione.

4. — Dimostrerò qui un teorema che non so se sia conosciuto sotto la forma generale seguente: « Se nell' espressione dell' elemento lineare di una superficie (4) $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, i coefficienti E, F, G sono funzioni di una sola delle variabili, la superficie è applicabile sopra una superficie di rivoluzione e le linee corrispondenti a quella variabile sono le trasformate dei paralleli ». Supponiamo per es. che E, F, G siano funzioni solo di u e cambiamo nell' elemento lineare le linee v prendendo a linee coordinate le u e le loro traiettorie ortogonali t. Dovremo considerare v come funzione di u, t, con che l' elemento lineare (4) assumerà la forma:

$$ds^2 = \left\{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right\}du^2 + 2\frac{dv}{dt}\left\{F + G\frac{dv}{du}\right\}du\,dt + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dt^2$$

e dovremo porre:

$$(6) \qquad F + G\frac{dv}{du} = o$$

Quest' equazione per la supposizione fatta si riduce subito alle quadrature e dà

$$v = -\int \frac{F}{G} du + kt$$

avendo scelto kt per la funzione arbitraria di t proveniente dall'integrazione, k essendo una costante. Avendo riguardo alla (6) ed all' altra:

$$\frac{dv}{dt} = k$$

l' elemento lineare (5) si trasformerà nel seguente:

$$ds^2 = \frac{EG - F^2}{G} du^2 + k^2 G\, dt^2,$$

che per essere E , F , G funzioni solo di u appartiene ad una superficie di rivoluzione, di cui le linee u=cost. sono i paralleli. Il teorema è così dimostrato.

Come conseguenza immediata del teorema precedente possiamo notare che:

« Se nell' elemento lineare (4) i coefficienti E , F , G « sono funzioni di $u+v$ la superficie sarà applicabile sopra « una superficie di rivoluzione e le linee $u+v$ cost. saranno « le trasformate dei paralleli ». Per convincersi di ciò basta cambiare le linee u o v ponendo $u+v=\omega$, con che l' elemento lineare assume la forma richiesta dal teorema.

Come caso speciale di quest' ultima proprietà, se $F=o$, l' elemento lineare assume la forma

$$ds^2=\varphi(u+v)du^2+\psi(u+v\ du^2,$$

che già il Prof. Dini aveva dimostrato essere esclusiva alle superficie di rivoluzione (Giornale di Napoli; Anno 1865, pag. 253).

5. — Sulla superficie di rivoluzione generata da una cicloide che ruòta intorno alla sua tangente al vertice.

Dal teorema di Weingarten sulle evolute delle superficie per le quali un raggio di curvatura è funzione dell' altro si può dedurre una proprietà della superficie sopra citata.

Consideriamo la superficie di rivoluzione generata da una cicloide che ruota intorno alla sua base: da una nota proprietà di questa curva risulta che il raggio di curvatura relativo al meridiano è doppio di quello relativo al parallelo; per conseguenza se si hanno due di tali superficie generate da due cicloidi qualunque le loro evolute sono, per il teorema di Weingarten, applicabili l' una sull' altra. Ma dalle proprietà della cicloide risulta che l' evoluta di una superficie della classe suddetta è una superficie di rivoluzione generata dal ruotare di una cicloide intorno alla sua tangente al vertice; possiamo quindi enunciare il teorema:

« Le superficie di rivoluzione generate dal ruotare di « ciclodi qualunque intorno alle respettive tangenti ai vertici « sono tutte applicabili l' una sull' altra ».

Questa curiosa proprietà della cicloide può anche dimostrarsi, indipendentemente dal teorema di Weingarten, nel modo seguente che ci mostra di più in qual modo due di queste superficie si possono distendere l' una sull' altra. Prendiamo una cicloide qualunque e situiamo l' origine

degli archi u al vertice del ramo di cicloide che si considera; indicando con a il raggio del cerchio generatore e con r il raggio del parallelo della superficie generata dal ruotare della cicloide intorno alla tangente al vertice, avremo

$$(7)\quad u = 2\sqrt{2ar},$$

quindi l'elemento lineare della superficie di rivoluzione generata sarà dato da

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^4}{(8a)^2}\, dv^2 \quad (*)$$

che ponendo $\frac{v}{8a} = v_1$, si rende indipendente da a. Si vede quindi subito la verità della proprietà enunciata. Riguardo poi al modo con cui due delle superficie di rivoluzione del teorema si applicano l'una sull'altra, è da osservarsi che, siccome la (7) non vale che per il primo ramo della cicloide, così quelle due superficie si applicano solo a pezzi l'una sull'altra, cioè la parte della prima generata da un ramo della sua cicloide si applica sulla parte della seconda generata pure da un ramo della sua cicloide. Uno qualunque poi di questi due pezzi non può coprire interamente l'altro, nè esserne interamente coperto. Ma se a, b sono i rispettivi dei cerchi generatori delle due cicloidi ed $a > b$ è sovrabbondante nel primo pezzo la parte di superficie compresa fra i paralleli $u=4a$, $u=4b$ e la parte simmetrica

(*) Da questa forma dell'elemento lineare si vede che la curvatura geodetica dei paralleli varia in ragione inversa dell'arco del meridiano e la curvatura della superficie in ragione inversa del quadrato di questo arco.

nell'altra metà del ramo, parti le cui aree riunite danno: $\frac{32\pi}{3a}(a^3-b^3)$, e nel secondo pezzo è sovrabbondante la parte di superficie compresa fra due meridiane i cui piani formano fra loro un angolo eguale ad $\frac{2\pi}{a}(a-b)$, parte la cui area è data da: $\frac{32\pi b^2}{3a}(a-b)$.

Osserverò da ultimo che, essendo la costruzione dei profili derivati di una *moulure*, che si deforma conservando le sue linee di curvatura, identica a quella dei profili derivati di una superficie di rivoluzione potremo generalizzare il teorema trovato dicendo « Se agli assi di due superficie di rivoluzione generate dal ruotare di cicloidi qualunque intorno alle rispettive tangenti ai vertici si fanno percorrere due cilindri convenientemente dipendenti l'uno dall'altro le moulures inviluppi saranno pure applicabili l'una sull'altra » In particolare se uno dei cilindri è circolare retto anche l'altro è circolare retto, quindi: « La superficie di rivoluzione generata da una cicloide che ruota intorno ad una parallela alla sua tangente al vertice (ossia alla sua base) è applicabile sopra altre infinite superficie di rivoluzione generate nello stesso modo da altre cicloidi » La condizione di applicabilità di due qualunque di queste superficie di rivoluzione è data dalla formula:

$$ad=bd',$$

ove a , b indicano i rispettivi raggi dei cerchi generatori delle cicloidi e d , d' le distanze degli assi di rivoluzione delle rispettive tangenti ai vertici, intendendo che queste distanze siano contate positivamente o negativamente secondo che la parallela alla tangente al vertice è situata dalla stessa banda della cicloide o dalla banda opposta.

5. *bis* — **Sopra una proprietà della trattrice.**

Una curva piana C, descritta nel piano coordinato $z\,y$, si muova nello spazio in modo che il suo piano resti parallelo a sè stesso, mentre un determinato punto dell' asse y descrive una curva C′ tracciata nel piano $x\,y$. Sia v l' arco di C contato a partire da un punto fisso e medesimamente u l' arco di C′ e cerchiamo l' elemento lineare della superficie S generata da C nel suo moto, prendendo a linee coordinate le $u\ v$. Sia y=V, dove V è funzione della sola v l'equazione di C nel suo piano ed y=U, dove U è funzione solo di u, l'equazione di C′ nel suo piano; le coordinate correnti x, y, z di un punto di S saranno date dalle formule:

$$(\alpha)\quad x=\int\sqrt{1-\mathrm{U}'^2}\,du\ ,\quad y=\mathrm{U}+\mathrm{V}\ ,\quad 2=\int\sqrt{1-\mathrm{V}'^2}\,dv.$$

Di qui si trae:

$$(\beta)\quad ds^2=du^2+2\mathrm{U}'\mathrm{V}'du\,dv+dv^2.$$

Ora se U′V′ è funzione di $u+v$ la superficie S sarà applicabile sopra una superficie di rivoluzione (N.° 4) e le linee $u+v$ saranno le trasformate dei paralleli. Perchè la condizione precedente sia soddisfatta, occorre che si abbia:

$$\mathrm{U}''\mathrm{V}'=\mathrm{U}'\mathrm{V}'',$$

ossia:

$$\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'}=\frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{V}'}=a,$$

dove a è una costante, quindi integrando:

$$U'=B\,e^{au} \quad , \quad V'=B'e^{av} \, ,$$

dove B , B' sono costanti arbitrarie. È facile poi vedere che, senza alterare la generalttà della superficie S, possiamo prendere:

$$(\gamma) \quad U=e^{au} \quad , \quad V=\pm e^{av} \, ;$$

si può quindi enunciare il teorema « Se il piano di una « trattrice si muove parallelamente a sè stesso ed in modo « che un punto fisso di esso percorra una trattrice eguale « situata in un piano perpendicolare a quello della trattrice « mobile, quest'ultima curva genera una superficie applica- « bile sopra una superficie di rivoluzione ».

Ponendo in (β) per U , V i loro valori (γ) si ha per l' elemento lineare della superficie considerata la formula:

$$ds^2=du^2 \pm 2a^2 e^{a(u+v)} du\, dv+dv^2.$$

Se si cambiano le linee coordinate u , v ponendo

$$u+v=2\omega \quad , \quad u-v=2\,t \, ,$$

si trova:

$$ds^2=2\left\{1 \pm a^2 e^{2a\omega}\right\} d\omega^2+2\left\{1 \mp a^2 e^{2a\omega}\right\} dt^2,$$

e ciò mostra che sulla superficie considerata le linee $u+v=$cost. sono le trasformate dei paralleli e le $u-v=$cost. le trasformate dei meridiani.

Per determinare poi la curva meridiana $z=\varphi(r)$ della

superficie di rivoluzione, tanto nel caso in cui si prendano i segni superiori quanto in quello in cui si prendano gli inferiori, si trova l'equazione differenziale:

$$1+\varphi'^2(r)=\frac{2k^4(2-k^2r^2)r^2}{a^2(\quad -k^2r^2)^2},$$

la cui integrazione dipende dalle funzioni ellittiche. La equazione precedente può scriversi:

$$(\delta)\quad \frac{dz}{dr}=\frac{\sqrt{a^2+2k^2}}{a}\sqrt{\frac{2}{k^2(a^2+2k^2)}}-\frac{\left(r^2-\frac{1}{k^2}\right)^2}{r^2-\frac{1}{k^2}};$$

ora se invece di questa equazione si considera l'altra:

$$(\varepsilon)\quad \frac{dz}{dr}=\frac{r^2-\frac{1}{k^2}}{\sqrt{\frac{2}{k^2(a^2+2k^2)}-\left(r^2-\frac{1}{k^2}\right)^2}}$$

questa ci definisce la *curva elastica*, quindi la meridiana (δ) della nostra superficie di rivoluzione ha colla curva elastica (ε) la relazione seguente, che nei punti corrispondenti alla stessa ascissa r per le due curve, le respettive tangenti fanno all'asse di rotazione angoli tali che il prodotto delle loro tangenti trigonometriche è una costante.

Se nelle (α) si pongono per U, V i loro valori (γ) e si eseguiscono le integrazioni, si trova:

$$x=\frac{1}{a}\left(\sqrt{1-a^2e^{2au}}-\text{sett tgh}\sqrt{1-a^2e^{2au}}\right)\ ,\ y=e^{au}\pm e^{av}\ ,$$

$$z=\frac{1}{a}\left(\sqrt{1-a^2e^{2av}}-\text{sett tgh}\sqrt{1-a^2e^{2av}}\right)\ .$$

Queste formule ci danno in termini finiti le equazioni di due superficie della classe considerata applicabili l' una sull' altra e sulla superficie di rivoluzione, il cui meridiano è la curva (δ). L' una superficie si distingue dall' altra pel modo con cui la trattrice mobile è situata rispetto alla trattrice fissa.

Elicoidi.

6. — Nei §§. seguenti faccio alcune applicazioni del noto teorema di Bour, ricercando le superficie di rivoluzione applicabili sopra superficie elicoidali speciali; ma prima mi è utile il premettere le seguenti considerazioni. In un elicoide possiamo considerare la sezione che si ottiene tagliandolo con un piano passante per l' asse ovvero con un piano perpendicolare all' asse; indicherò la prima col nome di *profilo meridiano* e la seconda con quello di *sezione retta*. Ora è evidente che, dato il parametro del moto elicoidale, il profilo meridiano e la sezione retta debbono essere legati per modo fra loro che dato l' uno di questi elementi l' altro ne consegua. Per trovare quale è la relazione accennata supponiamo che $z=\varphi(\rho)$ sia l'equazione del profilo meridiano; allora le coordinate x, y, z dell'elicoide saranno date (ritenendo le consuete notazioni) dalle formule:

$$(8)\qquad x=\rho\cos\omega\quad,\quad y=\rho\cos\omega\quad,\quad z=m\,\omega+\varphi(\rho).$$

Se si fa in queste relazioni $z=0$, le coordinate x, y della sezione retta saranno date da:

$$x=\rho\cos\omega \quad , \quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega$$

ove ρ è legato con ω dalla equazione

$$m\omega+\varphi(\rho)=0.$$

Ora, se si riferisce la sezione retta ad un sistema di coordinate polari R, θ, di cui il polo sia l'origine delle primitive coordinate e l'asse polare sia l'asse delle x, si vedrà subito per le formule precedenti che l'equazione in coordinate polari R, ω della sezione retta sarà

$$m\theta=-\varphi(\mathrm{R}).$$

Possiamo dunque enunciare il teorema « Se l'equazione in coordinate Cartesiane del profilo meridiano di un elicoide è: $z=\varphi(\rho)$, quella in coordinate polari della sezione retta dell'elicoide stesso sarà: $m\theta=-\varphi(\mathrm{R})$ » Viceversa « Se la sezione retta ha per equazione $\theta=f(\mathrm{R})$ quella del profilo meridiano sarà $z=-mf(\rho)$ ».

Per es. la sezione retta di un elicoide gobbo a direttrice rettilinea è una spirale di Archimede, quella di un elicoide, il cui profilo meridiano è un iperbola equilatera avente l'asse per assintoto, è una spirale iperbolica ec.

7. — Ricordiamo che l'elemento lineare dell'elicoide (8) è dato dalla formula

$$ds^2=\left\{1+\frac{\rho^2\varphi'^2(\rho)}{\rho^2+m^2}\right\}d\rho^2+k(\rho^2+m^2)\,dt^2$$

quando si riferisca alle eliche ρ ed alle loro traiettorie ortogonali t, k essendo una costante arbitraria e che quindi l' equazione $z=\psi(r)$ della meridiana della superficie di rivoluzione applicabile sovra di esso è data dall'equazione differenziale:

$$(9)\qquad \frac{r^2}{k^2(r^2-m^2k^2)}+\frac{1}{k^2}\varphi'^2\left(\frac{\sqrt{r^2-m^2k^2}}{k}\right)=1+\psi'^2(r)$$

Supponiamo che la sezione retta del nostro elicoide sia la spirale logaritmica.

$$\theta=a\log R;$$

il profilo meridiano sarà allora (N.° 6) la curva logaritmica

$$z=-a\,m\log\rho$$

e la (9) diverrà:

$$\frac{r^2}{k^2(r^2-m^2k^2)}+\frac{a^2m^2}{r^2-m^2k^2}=1+\psi'^2(r)$$

che prendendo $k=1$ si integra immediatamente e dà

$$z=\psi(r)=m\sqrt{a^2+1}\ \text{sett cosh}\ \frac{z}{m}$$

cioè

$$r=m\cos h\frac{z}{m\sqrt{a^2+1}}$$

Questa curva deriva dalla catenaria come l' ellisse dal cerchio, *accorciando* le sue ordinate in un rapporto costante. Invece la superficie di rivoluzione la cui meridiana è la curva

$$r = b \cos h \frac{z}{a}$$

ove $b > a$ è applicabile sull' iperboloide di rivoluzione ad una falda (V. Dini, Annali di Tortolini Tomo VII. p. 42) ossia sull' elicoide gobbo a direttrice rettilinea, la cui sezione retta è una spirale di Archimede. Possiamo quindi dire. « La superficie di rivoluzione, il cui meridiano « è la curva

$$r = b \cos h \frac{z}{a}$$

« è applicabile sopra un elicoide, la cui sezione retta è una « spirale logaritmica o una spirale di Archimede col polo « sull' asse, secondo che b è minore o maggiore di a ».

Nel caso di $b = a$ la superficie di rivoluzione è l'alissoide e la sezione retta dell' elicoide è una retta, che sega l' asse. Questa retta serve così di passaggio dalla forma della spirale logaritmica a quella della spirale di Archimede.

8. — Consideriamo l' elicoide la cui sezione retta è una circonferenza di raggio a segante l' asse; l' equazione di questa curva in coordinate polari è:

$$\mathrm{R} = a \cos \theta$$

e quindi quella del profilo meridiano sarà:

$$z = \varphi(\rho) = -m \operatorname{arc} \cos \frac{\rho}{a}$$

La (9) diverrà quindi nel nostro caso:

$$\frac{r^2}{k^2(r^2-m^2k^2)}+\frac{m^2}{(a^2+m^2)k^2-r^2}=1+\psi'^2(r)$$

se si prende $k=1$ si avrà:

$$z=\psi(r)=m\,a\int\frac{dr}{\sqrt{(a^2+m^2-r^2)(r^2-m^2)}}$$

Introducendo le funzioni ellittiche questa quadratura si eseguisce subito e si trova:

$$r=m\,sn\left(\frac{i\sqrt{a^2+m^2}}{a\,m}z+c\,,\,\frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$$

Possiamo disporre della costante c in modo da far sparire l'immaginario ed ottenere un semplice risultato. Se prendiamo infatti $c=K$, essendo $=4K$ il periodo reale di $sn\left(z,\frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$, avremo per note formule:

$$r=m\frac{cn\left(\frac{i\sqrt{a^2+m^2}}{a\,m}z\,,\,\frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)}{dn\left(\frac{i\sqrt{a^2+m^2}}{a\,m}z\,,\,\frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)}$$

e servendosi delle trasformazioni complementarie delle funzioni ellittiche si trova

$$(10)\qquad r=\frac{m}{dn\left(\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{am}z\,,\,\frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)}$$

La equazione precedente può porsi sotto altra forma; è evidente infatti che all' argomento della funzione ellittica che vi comparisce possiamo aggiungere una costante qualunque, ciò equivalendo soltanto ad uno spostamento dell'origine delle coordinate lungo l'asse z. Se si aggiunge K, essendo 2K il periodo reale di $dn\left(z, \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$ e si applica la formula $dn(z+K, k)=\frac{k'}{dn(z, k)}$ si avrá:

$$(11) \quad r=\sqrt{a^2+m^2}\, dn\left(\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{am}z, \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$$

Possiamo quindi dire « L'elicoide, la cui sezione retta è una circonferenza di raggio a segante l'asse, è applicabile sulla superficie di rivoluzione il cui meridiano è la curva (11) ».

Se il raggio a della sezione retta dell'elicoide diviene infinito, l'elicoide diviene l'ordinario gobbo ad area minima e la curva (10) diviene:

$$r=\frac{m}{dn\left(\frac{z}{m}, 1\right)}=m\cosh\frac{z}{m}$$

cioè la catenaria comune e si ritrova un noto risultato. È facile vedere la ragione per cui dalla (11) non si può ottenere la stessa riprova; la costante K, che serve per passare dalla (10) alla (11) diverrebbe in questo caso infinita.

Dalle note proprietà delle funzioni ellittiche risulta che il raggio del parallelo della superficie di rivoluzione

trovata varia fra m e $\sqrt{a^2+m^2}$, e la curva meridiana dopo essersi recata dall'estremità di un raggio eguale ad m a quella di un altro raggio pure eguale ad m e susseguente al primo si riproduce periodicamente estendendosi all'infinito nell'un senso e nell'altro dell'asse z. Inoltre in ogni passaggio dall'estremità di un raggio eguale a: $\sqrt{a^2+m^2}$ al minimo susseguente eguale ad m ha un punto di flesso essendo concava verso l'asse z nella prima parte del suo cammino e convessa nella rimanente.

Osserviamo da ultimo che l'area compresa fra due raggi minimi successivi, l'asse z e la curva è data da $\pi a m$. Nel caso di $a=m$ quest'area è eguale a quella della sezione retta dell'elicoide, il cui profilo meridiano è allora la curva sinusoidale $\rho=m \cos \frac{z}{m}$; il modulo della funzione ellittica che compare nelle formule (10) (11) è allora $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9. — Consideriamo l'elicoide la cui sezione retta è una lemniscata di Bernoulli:

$$R^2=a^2 \cos 2\theta$$

col nodo sull'asse. Il profilo meridiano di questo elicoide sarà la curva

$$z=-\frac{m}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{\rho^2}{a^2}$$

da cui:

$$\varphi'(\rho)=\frac{m\rho}{\sqrt{a^4-\rho^4}}$$

La (9), prendendovi $k=1$, dà quindi nel nostro caso:

$$\frac{r^2}{r^2-m^2}+\frac{m^2(r^2-m^2)}{a^4-(r^2-m^2)^2}=1+\psi'^2(r)$$

da cui:

$$z=\psi(r)=ma^2\int\frac{dr}{\sqrt{(r^2-m^2)\{a^4-(r^2-m^2)^2\}}}.$$

Questa quadratura, quando si ponga $r^2-m^2=y$, è subito ridotta alle funzioni ellittiche e colle formule di questa teoria si troverà facilmente per equazione del meridiano della superficie di rivoluzione applicabile sull' elicoide considerato.

$$(12)\quad r=\frac{m\sqrt{a^2+m^2}}{\sqrt{a^2+m^2-a^2\,sn^2\left(\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{am}z,\ \sqrt{\frac{a^2-m^2}{a^2+m^2}}\right)}}$$

Il raggio del parallelo della superficie di rivoluzione trovata varia fra m e $\sqrt{a^2+m^2}$ e la curva meridiana si comporta come quella del numero precedente — La (12) viene a contenere solo un seno circolare quando $m=a$. se poi si fa crescere a all'infinito si riduce alle funzioni iperboliche e si ha:

$$r=\frac{m}{\sqrt{1-sn^2\left(\frac{z}{m},1\right)}}=\frac{m}{\sqrt{1-\operatorname{tang}h^2\frac{z}{m}}}=m\cos h\frac{z}{m}$$

La superficie di rivoluzione è allora l' alissoide e l' elicoide diviene l' ordinario gobbo ad area minima.

10. — Per ultimo esempio considero l'elicoide la cui sezione retta è una spirale iperbolica: il suo profilo meridiano sarà un iperbola equilatera avente l'asse per assintoto. L'equazione del profilo meridiano sarà quindi:

$$z=\frac{a^2}{\rho}$$

da cui

$$\varphi'(\rho)=-\frac{a^2}{\rho^2}.$$

La (9) diverrà quindi nel nostro caso

$$(13)\qquad \frac{r^2(r^2-m^2k^2)+a^4k^4}{k^2(r^2-m^2k^2)^2}=1+\psi'^2(r)$$

e prendendo $k=1$ si otterrà:

$$z=\psi(r)=\int\frac{\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}}{r^2-m^2}\,dr$$

ed eseguendo la quadratura:

$$z=m\log\left\{mr+\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}\right\}+\frac{a^2}{2m}\log$$
$$\left\{1-\frac{2a^2m}{r[mr+\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}]+m(a^2-m^2)}\right\}$$

Nel caso di $m=a$ la curva meridiana trovata si riduce assai semplice; essa è la seguente

$$r=\sqrt{a^2+e^{\frac{2z}{a}}}$$

Noterò da ultimo che se nella (13) si suppone $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ ed inoltre m, a legati dalla relazione $m^4=2a^4$ si ottiene per equazione della curva meridiana

$$z=r+\frac{m}{2\sqrt{2}}\log\frac{r\sqrt{2}-m}{r\sqrt{2}-m}$$

11. — Ciò che segue non è relativo alla deformazione degli elicoidi, sibbene ad un nuovo modo con cui queste superficie possono generarsi e per il quale vengono in certa guisa a collegarsi colla *moulures* e colle *canali*.

Sia data una curva gobba C ed una curva piana C′ ambedue arbitrarie; un punto del piano di C′ percorra la curva C, mentre il piano resta costantemente normale della C stessa, ed una retta fissa nel piano di C′ e segante C fa un angolo costante colla normale principale di quest' ultima curva — Si genera così una superficie, che è nello stesso tempo una generalizzazione delle superficie canali e di quelle *moulures*. Chiamerò la curva C direttrice e la C′ generatrice della superficie considerata.

Ricerchiamo ora l'elemento lineare di questa superficie; a variabile v prenderò l' arco della C, rispetto alla quale poi riterrò le altre denominazioni usate ai numeri 1, 2. Riferendo la curva C′ ad un sistema di coordinate polari ρ, u nel suo piano, di cui il polo sia nel punto del piano di C′ che percorre C e l'asse polare la normale principale di C, prenderò a nuova variabile la u. Se con X, Y, Z indichiamo le coordinate correnti di un punto della superficie generata, sarà facile vedere che si ha:

$$(14)\qquad X=x+\rho(\cos\xi\cos u+\cos\lambda\,\mathrm{sen}\,u),$$
$$Y=y+\rho(\cos\eta\cos u+\cos\mu\,\mathrm{sen}\,u)\,,\ Z=z+\rho(\cos\varsigma\cos u+\cos\nu\,\mathrm{sen}\,u).$$

Di qui, avendo riguardo alle formule di Serret già citate, si trae:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dX}{du}=\rho(\cos u\cos\lambda-\mathrm{sen}\,u\cos\xi)+\frac{d\rho}{du}(\cos u\cos\xi+\mathrm{sen}\,u\cos\lambda)\,,\\
&\qquad\frac{dX}{dv}=\cos\alpha\left(1-\frac{\rho\cos u}{R}\right)-\frac{\rho\cos u}{T}\cos\lambda+\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,u}{T}\cos\xi\\
&\frac{dY}{du}=\rho\left(\cos u\cos\mu-\mathrm{sen}\,u\cos\eta\right)+\frac{d\rho}{du}\left(\cos u\cos\eta+\mathrm{sen}\,u\cos\mu\right),\\
&\qquad\frac{dY}{dv}=\cos\beta\left(1-\frac{\rho\cos u}{R}\right)-\frac{\rho\cos u}{T}\cos\mu+\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,u}{T}\cos\eta\\
&\frac{dZ}{du}=\rho\left(\cos u\cos\nu-\mathrm{sen}\,u\cos\varsigma\right)+\frac{d\rho}{du}\left(\cos u\cos\varsigma+\mathrm{sen}\,u\cos\nu\right),\\
&\frac{dZ}{dv}=\cos\gamma\left(1-\frac{\rho\cos u}{R}\right)-\frac{\rho\cos u}{T}\cos\nu+\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,u}{T}\cos\varsigma.
\end{aligned}\right.$$

Ed' ora con queste formule si troverà per l' elemento lineare cercato.

$$(15)\ ds^2=\left\{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2\right\}du^2-2\frac{\rho^2}{T}du\,dv+\left\{\left(1-\frac{\rho\cos u}{R}\right)^2+\frac{\rho^2}{T^2}\right\}dv^2.$$

Ora, se si suppone R, T costanti, i coefficienti di questo elemento lineare saranno funzioni delle sole u, quindi (V. N.° 4) la superficie sarà applicabile sopra una superficie di rivoluzione e le linee u saranno le trasformate dei paralleli. Questo risultato coincide con quello di Bour, poichè le superficie della classe considerata, aventi a direttrice un elica circolare, sono precisamente le superficie elicoidali e le lineé $u=\mathrm{cost}$ sono le eliche.

12. — Quantunque non sia difficile convincersi di ciò geometricamente, credo bene darne qui una dimostrazione analitica, provando che se C è un' elica circolare le linee u=cost sono altrettante eliche dello stesso passo dell'elica C e descritte su cilindri concentrici a quello su cui è descritta la C stessa.

Siano

$$x=a\cos\varphi \qquad y=a\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z=a\,\varphi\cot i$$

le coordinate di un punto di C. Avremo (Serret Cal. Dif. §. 300)

$$\cos\xi=-\cos\varphi\ ,\quad \cos\eta=-\mathrm{sen}\,\varphi\ ,\quad \cos\varsigma=0$$

$$\cos\lambda=-\cos i\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ,\quad \cos\mu=\cos i\cos\varphi\ ,\quad \cos\nu=-\mathrm{sen}\,i$$

Le (14) diverranno quindi in questo caso:

$$\begin{aligned}
X&=a\cos\varphi-\rho(\cos u\cos\varphi+\cos i\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ,\\
Y&=a\,\mathrm{sen}\,\varphi+\rho(\cos i\,\mathrm{sen}\,u\cos\varphi-\cos u\,\mathrm{sen}\,\varphi)\ ,\\
Z&=a\,\varphi\cot i-\rho\,\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,u.
\end{aligned}$$

Di qui si ricava:

$$X^2+Y^2=a^2-2\,a\,\rho\cos u+\rho^2(\cos^2 u+\cos^2 i\,\mathrm{sen}^2 u)$$

dunque le u sono descritte sopra cilindri circolari aventi per asse l'asse dell'elica C. Il raggio R del cilindro corrispondente ad un dato valore di u è determinato dalla relazione:

$$R^2=a^2-2\,a\,\rho\cos u+\rho^2(\cos^2 u+\cos^2 i\,\mathrm{sen}^2 u).$$

Se indichiamo con I l'angolo che la curva u=cost fa coll'asse z, avremo:

$$\cos I = \frac{\frac{dX}{d\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2}},$$

e calcolandolo effettivamente si trova:

$$\cos I = \frac{a \cot i}{\sqrt{R^2+a^2 \cot^2 i}},$$

dunque I=cost, per u=cost, e perciò le u=cost sono eliche. Finalmente se indichiamo con p il passo dell'elica C e con P quello di u=cost si ha:

$$p=2\pi a \cot i \quad , \quad P=2\pi R \cot I$$

e colle formule precedenti si trova subito: $P=p$. Il teorema è quindi dimostrato.

13. — Dalla formula (15) ne deduce un'altra, di cui in seguito dovrò far uso. Supponiamo nella formula citata $\rho=a$, essendo a una costante, essa diverrà.

$$ds^2=a^2\,du^2-\frac{2a^2}{T}\,du\,dv+\left\{\left(1-\frac{a\cos u}{R}\right)^2+\frac{a^2}{T^2}\right\}dv^2$$

Se riduciamo le coordinate ortogonali, cambiando le linee u, il che si otterrà ponendo:

$$u=\int\frac{dv}{T}+k\,\omega,$$

k essendo una costante arbitraria, avremo

$$(16)\quad ds^2 = \left[1 - \frac{a}{R}\cos\left(k\,\omega + \int \frac{dv}{T}\right)\right]^2 dv^2 + a^2k^2d\omega^2,$$

che è una forma rimarchevole, cui può ridursi l' elemento lineare delle superficie canali, quando si riferisca alle linee di curvatura, che sono i cerchi v=cost e le traiettorie ortogonali ω=cost (*). Se R, T sono costanti, si ha la superficie canale, la cui direttrice è un' elica circolare. Essa, come risulta da ciò che abbiamo dimostrato in generale, od anche del ridursi del suo elemento lineare alla forma: $ds^2 = f^2(\omega + v)dv^2 + b^2d\omega^2$, è applicabile sopra una superficie di rivoluzione. Dalla formula precedente si deduce di più (Dini — Giornale di Napoli Anno 1865, P.ª 65) che, nel deformarsi di questa superficie canale in superficie di rivoluzione, i suoi cerchi si trasformano in un sistema di geodetiche, seganti i paralleli secondo un angolo costante lungo ciascuno di questi. Viceversa si può dire che questa superficie di rivoluzione gode della proprietà, che il suddetto sistema di geodetiche può divenire colla deformazione della superficie in sistema di linee di curvatura della superficie deformata.

(*) Con queste formule si trova subito che tanto l'elemento superficiale, quanto la curvatura delle superficie canali non dipendono dalla torsione T della direttrice, la quale può quindi torcersi con qualunque modo, pure conservando in ciascun punto invariata la prima curvatura, senza che gli elementi suddetti della superficie canale subiscano alterazione.

Superficie che hanno un sistema di linee di curvatura in piani paralleli.

14. — L'elemento lineare delle moulures, riferito alle linee di curvatura u, v, assume la forma:

$$(17) \qquad ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2,$$

dove U è funzione solo di u e V di v. Le v=cost sono i profili e le u=cost sono il sistema di linee di curvatura in piani paralleli. Ora è noto che, se l'elemento lineare di una superficie è posto sotto la forma:

$$(18) \qquad ds^2 = du^2 + G\, dv^2,$$

la curvatura K della superficie e la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee u sono date dalle formule:

$$(19) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2\sqrt{G}}{du^2}, \quad \frac{1}{\rho^2_u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{G}}{du}$$

le quali applicate alla (17) mostrano, che nelle moulures il rapporto fra la loro curvatura e la curvatura geodetica delle linee u è costante lungo una stessa linea u. Reciprocamente dico che si ha il teorema: « Se esiste sopra una « superficie un sistema di linee geodeticamente parallele, e « tali che lungo ciascuna di esse il rapporto fra la « curvatura della superficie e la curvatura geodetica della « linea stessa non varii, la superficie sarà applicabile sopra « una moulure e le traiettorie ortogonali di quelle linee « saranno le trasformate dei profili. »

Prendiamo il sistema di linee accennato a linee u e le traiettorie ortogonali a linee v; siccome le u sono paral-

lele geodeticamente, l'elemento lineare riferito alle u v, assumerà la forma (18) e, per quello che si è supposto, si dovrà avere per le (19):

$$\frac{\frac{d^2\sqrt{G}}{du^2}}{\frac{d\sqrt{G}}{du}}=\varphi(u),$$

dove $\varphi(u)$ indica una funzione di u; di qui si trae con una prima integrazione

$$\log\frac{d\sqrt{G}}{du}=\int\varphi(u)du+\psi(v)$$

e con una seconda integrazione:

$$\sqrt{G}=\psi(v)\int e^{\int\varphi(u)du}.du+\chi(v),$$

dove $\psi(v)$ e $\chi(v)$ sono due funzioni arbitrarie di v. Siccome poi, senza alterare la natura della superficie, possiamo fare $\psi(v)=1$, così il teorema è dimostrato.

15. — Allorquando il rapporto indicato con $\varphi(u)$ nel numero precedente è costante su tutta l'estensione della superficie, l'elemento lineare di questa moulure si può ridurre alla forma:

$$(20)\qquad ds^2=du^2+(e^{au}-V_1)^2dv^2,$$

ciò che mostra il profilo essere in questo caso una trattrice.

È notevole che sulle moulures, aventi questo profilo, si possono determinare i sistemi isotermi e risolvere quindi il problema di rappresentarle sopra un piano in modo da

conservare la similitudine nelle parti infinitesime. Si può infatti trovare un fattore integrante dell' espressione differenziale.

$$du+i(e^{au}-V_1)dv$$

per mezzo del prodotto di due funzioni, l'una di u l' altra di v. Un tal fattore integrante è dato dalla formula:

$$\lambda=e^{-au}e^{ia\int V_1 dv}.$$

Sulle superficie in questione ritroviamo quindi un sistema di linee isoterme α , β mediante la formula:

$$\alpha+i\beta=-\frac{1}{a}e^{-au}e^{ia\int V_1 dv}+i\int e^{i\int V_1 dv}dv,$$

che, separando le parti reale ed immaginaria, dà:

$$(21)\quad\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{a}e^{-au}\cos(a\int V_1 dv)-\int \operatorname{sen}(a\int V_1 dv)dv\\ \beta=-\frac{1}{a}e^{-au}\operatorname{sen}(a\int V_1 dv)+\int \cos(a\int V_1 dv)dv.\end{cases}$$

Se poniamo per semplicità:

$$a\int V_1 dv=V,$$

con che l'elemento lineare (20) diverrà:

$$ds^2=du^2+\left(e^{au}-\frac{V'}{a}\right)^2 dv^2,$$

le (21) daranno:

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{a} e^{-au} \cos V - \int \operatorname{sen} V dv \\ \beta = -\frac{1}{a} e^{-au} \operatorname{sen} V + \int \cos V dv . \end{cases}$$

L'elemento lineare della moulure considerata riferito alle α, β diverrà:

$$ds = e^{2au}(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

dove per u si intende sostituito il suo valore in funzione di α, β che se ne otterrebbe dalle (22).

16. — Se le moulures aventi a profilo una trattrice, fossero tutte applicabili sopra superficie di rivoluzione, l'avere trovato per questa classe di superficie le linee isoterme non darebbe nulla di nuovo. Ora esistono effettivamente delle moulures di questa classe applicabile sopra delle superficie di rivoluzione (Dini — Giornale di Napoli Anno 1865 pag. 70); è ben vero che il loro cilindro direttore non è arbitrario, ma ciò potrebbe dipendere dal modo particolare con cui esse si deformano in superficie di rivoluzione, essendo che i loro profili vengono a disporsi secondo geodetiche, di cui i paralleli sono traiettorie. Potrebbe quindi darsi che le moulures della classe che consideriamo, aventi cilindri direttori diversi da quelle trovate dal Prof. Dini, fossero suscettibili di deformazioni in diverso modo in superficie di rivoluzione. Dimostrare che ciò non è, è lo scopo del calcolo seguente.

Prendiamo perciò l'elemento lineare delle moulures della classe suddetta:

$$ds^2 = du^2 + (e^{au} - V)^2 dv^2.$$

ed osserviamo che, se la superficie cui appartiene questo

elemento lineare è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, le linee t lungo le quali è costante la curvatura della superficie, ovvero nel caso nostro la curvatura geodetica delle u, debbono essere geodeticamente parallele fra loro. (*) Ma si ha:

$$\frac{1}{\rho u} = - \frac{de^{au}}{e^{au} - V},$$

potremo dunque porre:

$$\frac{e^{au}}{e^{au} - V} = t,$$

da cui:

$$e^{au} = \frac{Vt}{t-1}, \quad du = \frac{V'}{aV} dv - \frac{1}{at(t-1)} dt,$$

e se prendiamo a linee coordinate le v e le t avremo:

$$ds^2 = \frac{dt^2}{a^2t^2(t-1)^2} - 2\frac{V'}{aV}\frac{1}{at(t-1)} dv dt + \left\{ \frac{V^2}{(t-1)^2} + \frac{V'^2}{a^2 - V^2} \right\} du^2.$$

Ponendo ora:

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \omega$$

si otterrà:

$$(23) \quad ds^2 = d\omega^2 - 2\frac{V'}{aV} d\omega dv + \left\{ \frac{V'^2}{a^2V^2} + \left(e^{a\omega} - 1\right)^2 V^2 \right\} dv.$$

(*) Ciò non potrebbe più dirsi se la superficie considerata potesse essere a curvatura costante, ma ciò non può essere a meno che non sia di rivoluzione.

Ora è noto che se l'elemento lineare di una superficie si pone sotto la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

la condizione necessaria e sufficiente, affinchè le u siano geodeticamente parallele fra loro è che si abbia:

$$\frac{d}{dv}\frac{EG - F^2}{G} = 0;$$

ciò del resto risulta facilmente dal calcolo fatto a N.° 4. E, siccome nella formula (23) le ω debbono essere geodeticamente parallele, si dovrà avere:

$$\frac{d}{dv}\frac{V^2\left(e^{a\omega} - 1\right)^2}{\frac{V'^2}{a^2V^2} + V^2\left(e^{a\omega} - 1\right)^2} = 0,$$

ovvero:

$$\frac{V'^2}{a^2V^2}\frac{d}{dv}\left[V^2\left(e^{a\omega} - 1\right)^2\right] - V^2\left(e^{a\omega} - 1\right)^2\frac{d}{dv}\frac{V'^2}{a^2V^2} = 0,$$

cioè:

$$\frac{d}{dv}\frac{V'}{V^2} = 0.$$

Di qui si ha subito:

$$V = \frac{1}{c'(v + c)},$$

dove c, c' sono costanti. Ora tale appunto deve essere il

cilindro direttore per le moulures, aventi a profilo una trattrice, che si applicano nel modo speciale già detto sopra superficie di rivoluzione. Si conclude quindi che delle moulures, avente a profilo una trattrice, quelle trovate dal Prof. Dini sono le uniche applicabili sopra superficie di rivoluzione.

Sopra un problema della teoria della deformazione delle superficie (*).

(17).— Mi propongo qui di risolvere il seguente problema: « È possibile deformare una data superficie in modo « che un sistema di linee tracciato su di essa diventi un « sistema di linee di curvatura per la deformata? »

Sulla superficie data S si prendano a linee coordinate il sistema dato di linee, che diremo v e le loro traiettorie ortogonali u. L'elemento lineare della superficie S riferito a queste coordinate sarà dato dalla formula:

$$(24) \qquad ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2.$$

dove E, G sono determinate funzioni di u, v dipendenti sì dalla natura di S, si da quella delle linee v scelte su di essa. Si vede subito che il problema proposto coincide coll'altro: « Esiste una superficie, per la quale l'elemento « lineare riferito alle linee di curvatura assume la forma « (24), dove E, G sono quelle funzioni di u, v avanti « stabilite? » Supponiamo che una tal superficie S' esista;

(*) Un caso particolare di questo problema è stato trattato dal Codazzi negli Annali di Tortolini (Anno 1856). Egli ha ricercato se esistono superficie, che possano deformarsi conservando le loro linee di curvatura, ed ha trovato che solo le moulures e le sviluppabili sono suscettibili di tali deformazioni.

se con r_1, r_2 indichiamo i suoi raggi di curvatura relativi alle linee u, v rispettivamente, dovremo avere le seguenti relazioni (Dini — Sopra alcuni punti della teoria delle superficie §. 24.):

$$(25)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{d\log\sqrt{E}}{dv}-\dfrac{d\dfrac{1}{r_2}}{dv}=0 \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{d\log\sqrt{G}}{du}+\dfrac{d\dfrac{1}{r_1}}{du}=0 \end{cases}$$

Se poi l'elemento lineare sferico corrispondente della rappresentazione di Gauss è dato da:

$$(26)\qquad ds'^2=E'du^2+G'dv^2,$$

si dovrà avere:

$$(27)\qquad \sqrt{E'}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}\ ,\ \sqrt{G'}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}$$

ed E', G' dovranno soddisfare la equazione seguente:

$$(28)\qquad \sqrt{E'G'}=-\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{d\sqrt{G'}}{du}\right)-\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{d\sqrt{E'}}{dv}\right)$$

la quale esprime che la curvatura della superficie, cui appartiene l'elemento lineare (26), è data dall' unità positiva.

Viceversa, avendo riguardo a ciò che il prof. Dini ha esposto in un altra sua memoria (Ricerche sopra la teorica delle superficie §. 3.), si vedrà che il problema sarà possibile, quando esistano due funzioni r_1 r_2 che soddisfino le

due (25) ed insieme la (28), ove $\sqrt{E'}$, $\sqrt{G'}$ hanno i valori (27).

Alla equazione (28) possiamo sostituirne un' altra in termini finiti fra r_1, r_2 che semplicizza grandemente il problema. L'equazione accennata è la seguente:

$$(29)\qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}\right)\right\}.$$

È facile vedere effettivamente che, ammesse le (25), la (29) è conseguenza della (28) e viceversa. La equazione scritta esprime che la quantità $\frac{1}{r_1 r_2}$ è eguale alla curvatura K della superficie. Il problema proposto è così ridotto a trovare due funzioni r_1, r_2, che soddisfino le due equazioni a derivate parziali (25) e l'equazione in termini finiti (29).

Il problema è suscettibile di ulteriore riduzione, potendosi eliminare per mezzo della (29) le derivate di $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ dalle (25). Senza stare qui a ripetere un calcolo che è stato già fatto dal Codazzi (Annali di Tortolini. Anno 1856 p.ª 410; darò la equazione risultante:

$$(30)\qquad \left\{\frac{d^2\log\sqrt{E}}{du\,dv}-\frac{d\log\sqrt{E}}{dv}\frac{d\log(KG)}{du}\right\}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-$$

$$-\left\{\frac{d^2\log(K\sqrt{G})}{du\,dv}-\frac{d\log E}{dv}\frac{d\log G}{du}\right\}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)+$$

$$+\frac{d^2\log\sqrt{G}}{du\,dv}-\frac{d\log\sqrt{G}}{du}\frac{d\log(KE)}{dv}=0,$$

dove K indica il secondo membro della (29), ossia la curvatura della superficie.

Per vedere adunque se è possibile deformare la superficie data nel modo voluto, basterà ricavare dalle (29), (30) i valori di $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ ed osservare se essi rendono identiche le (25). Questa prima parte della ricerca è ridotta quindi ad una semplice questione algebrica. Un sol caso di eccezione si presenta ed è quando la (30) è un'identità; ciò ha luogo soltanto (Codazzi m. c.) quando la superficie data sia la deformata di una *moulure* e le u, v siano le trasformate del sistema di linee di curvatura in piani paralleli e dei profili, astrazione fatta dalle superficie sviluppabili, che intendiamo escluse da queste ricerche.

Quantunque il metodo indicato sia teoricamente il più semplice, si troverà utile nei casi speciali, in causa della complicazione della (30), seguire l'altro, che ora passo ad esporre.

Sostituendo nella prima delle (25) ad $\frac{1}{r_1}$ il suo valore $K r_2$, si otterrà l'altra:

$$\frac{d\frac{1}{r_2^2}}{dv}+\frac{1}{r_2^2}\frac{d\log E}{dv}=K\frac{d\log E}{dv},$$

che si integra immediatamente e dà:

$$(31)\qquad \frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{E}\left(\varphi(u)+\int K\frac{dE}{dv}\,dv\right),$$

dove $\varphi(u)$ è una funzione arbitraria di u. Ora, se sarà possibile determinare $\varphi(u)$ in modo da soddisfare anche la seconda delle (25), il problema ammetterà una soluzione.

Verificata la possibilità del problema, si dovranno trovare le coordinate X, Y, Z dei punti della sfera rappre-

sentativa espresse per u, v, e dopo di ciò si troveranno con semplici quadrature le coordinate ξ, η, ς della superficie deformata colle formule seguenti:

$$(32)\quad \begin{cases} \xi = \int \left(r_2 \frac{dX}{du} du + r_1 \frac{dX}{dv} dv \right) \\ \eta = \int \left(r_2 \frac{dY}{du} du + r_1 \frac{dY}{dv} dv \right) \\ \varsigma = \int \left(r_2 \frac{dZ}{du} du + r_1 \frac{dZ}{dv} dv \right). \end{cases}$$

Per mostrare subito un esempio di ciò che qui si è detto osserviamo che, se si prende, $r_1 = r_2 = a$, dove a è una costante, le (25) sono identicamente soddisfatte e la (29) lo sarà pure, quando l'elemento lineare (24) appartenga ad una sfera di raggio a. Segue di qui che una superficie applicabile sopra una sfera può deformarsi in modo che qualunque sistema di linee tracciato su di essa diventi un sistema di linee di curvatura della deformata, la quale è una sfera. Ciò è ben naturale, poichè ogni linea di una sfera è una sua linea di curvatura.

(18). — Ricerchiamo se esistono superficie gobbe, le quali si possano deformare in modo che le loro generatrici diventino linee di curvatura della superficie deformata. L'elemento lineare delle superficie gobbe, riferito alle generatrici v ed alle loro traiettorie ortogonali u, assume la forma:

$$(33)\quad ds^2 = du^2 + \left\{ (u-\alpha)^2 + \beta^2 \right\} dv^2,$$

dove α, β sono funzioni solo di v. Qui si ha:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2\sqrt{G}}{du^2} = -\frac{\beta^2}{\left\{ (u-\alpha)^2 + \beta^2 \right\}^2}$$

Dalla (31) risulta:

$$r_2 = \varphi(u)$$

e la seconda delle (25), che nel caso di G qualunque da:

$$(33') \quad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{du}\frac{d^2\sqrt{G}}{du^2} + \varphi^2 \frac{d^3\sqrt{G}}{du^3} = -\frac{d\sqrt{G}}{du},$$

nel nostro caso somministra l'altra:

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{du}\frac{\beta^2}{(u-\alpha)+\beta^2} - 3\varphi \frac{2\beta^2(u-\alpha)}{\left\{(u-\alpha)^2+\beta^2\right\}^2} = u - \alpha,$$

la quale deve essere un' identità. Ora dunque se β contenesse effettivamente la v, un valore di v, che annullasse β annullerebbe il primo membro e non il secondo, dunque β è una costante. Se α non fosse anch'essa una costante riducendo la equazione precedente a forma intera, dovrebbero essere nulli i coefficienti delle diverse potenze di $u-\alpha$, il che non è. Ora, essendo α, β costanti, l'elemento lineare (33) appartiene all'elicoide gobbo ad area minima; dunque questa superficie e le sue deformate gobbe sono le uniche superfici rigate, che soddisfino alle condizioni del problema. Esse, deformandosi nel modo voluto, diventano di rivoluzione e le generatrici si trasformano nei meridiani, perchè l'elicoide suddetto è applicabile sull'alisseide e le generatrici sono le trasformate dei meridiani e d'altra parte, se una superficie di rivoluzione si deforma, conservando le sue linee di curvatura, essa resta di rivoluzione.

La questione precedente era già stata risoluta per altra via dal Prof. Dini (Ricerche sulla teorica delle superficie N.° 12).

19. — Consideriamo una superficie moulure e cerchiamo se è possibile deformarla in modo che le sue linee di curvatura restino tali per la deformata. L'elemento lineare di una tal superficie riferito alle linee di curvatura è dato dalla formula:

$$ds=du^2+(U-V)^2dv^2$$

La prima delle (25) ci dà:

$$r_2=\varphi(u)$$

ed avendosi: $K=-\dfrac{U''}{U-V}$, quindi: $\dfrac{1}{r_1}=-\dfrac{U''}{U-V}\varphi(u)$, la seconda delle (25) diviene:

$$\frac{U''}{2}\frac{d\varphi^2}{du}+U'''\varphi^2=-U'.$$

Se ne trae, integrando:

$$\varphi(u)=\frac{\sqrt{n^2-U'^2}}{U''}$$

e si avrà perciò.

$$(34)\qquad r_2=\frac{\sqrt{n^2-U'^2}}{U''}\ ,\quad r_1=-\frac{U-V}{\sqrt{n^2-U'^2}}$$

$$(35)\qquad \sqrt{E'}=\frac{U''}{\sqrt{n^2-U'^2}},\ \sqrt{G'}=\sqrt{n^2-U'^2}$$

Dal calcolo fatto si conclude intanto che è possibile in infiniti modi (poichè n è arbitrario) deformare nel modo voluto una superficie moulure, e poichè le immagini sferiche delle linee di curvatura delle deformate sono un sistema

di meridiani e di paralleli, queste ultime superficie sono altrettante moulures.

Prendiamo ora a ricercare in termini finiti le equazioni delle superficie deformate. Coi valori (35) l'elemento lineare sferico diviene:

$$ds'^2 = \frac{U''}{n^2 - U'^2} du^2 + (n^2 - U'^2) dv^2 ,$$

che si deduce dall'ordinario sferico:

$$ds'^2 = dt^2 + \cos^2 t d\theta^2$$

alle sostituzioni:

$$U' = n \operatorname{sen} t \quad , \quad v = \frac{\theta}{n} .$$

Le coordinate X , Y , Z, che espresse per t , θ sono:

$$X = \cos t \cos \theta \quad , \quad Y = \cos t \operatorname{sen} \theta \quad , \quad Z = \operatorname{sen} t ,$$

quando si esprimano per u , v saranno date dalle formule:

$$X = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - U'^2} \cos nv \quad , \quad Y = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - U'^2} \operatorname{sen} nv \quad , \quad Z = \frac{U'}{n}$$

Di qui si trae:

$$\frac{dX}{du} = -\frac{U'U'' \cos nv}{n\sqrt{n^2 - U'^2}} , \frac{dY}{du} = -\frac{U'U'' \operatorname{sen} nv}{n\sqrt{n^2 - U'^2}} , \frac{dZ}{du} = \frac{U''}{n}$$

$$\frac{dX}{du} = -\sqrt{n^2 - U'^2} \operatorname{sen} nv , \frac{dY}{dv} = \sqrt{n^2 - U'^2} \cos nv , \frac{dZ}{dv} = 0,$$

ed avendo riguardo a queste formole ed alle (34) ed

applicando le (32) si troveranno i valori delle coordinate ξ, η, ς della deformata sotto la forma:

$$\xi = -\frac{U}{n}\cos n v - \int V \operatorname{sen} n v \, dv \ , \ \eta = -\frac{U}{n}\operatorname{sen} n v + \int V \cos n v \, dv \ , \ \varsigma = \int \sqrt{1-\frac{U'^2}{n^2}}\, d u$$

Se si cangiano i segni di ξ, η, ς il che non altera la natura della superficie si ottengono formule identiche a quelle già date dal Bour (Théorie de la deformation des surfaces §. 42.), le quali danno così le deformazioni più generali di una moulure sotto la condizione richiesta.

20. — Ricerchiamo ora se è possibile deformare una superficie di rivoluzione in modo che un sistema di geodeche, di cui i paralleli sono traiettorie, diventi un sistema di linee di curvatura della deformata.

Prese a linee coordinate sulla superficie di rivoluzione quel sistema di geodetiche e le loro traiettorie ortogonali u l'elemento lineare prenderà la forma. (Dini. Giornale di Napoli Anno 1865, P.ª 65):

$$ds^2 = du^2 + f^2(u+v)dv^2 .$$

Avendosi qui $E=1$, si avrà come abbiamo già osservato al N.° 18;

$$r_2 = \varphi(u)$$

e la seconda delle (25) ci darà la (33'), che nel nostro caso diviene:

$$(36) \quad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{du} f'(u+v) + \varphi^2 f''(u+v) + f(u+v) = 0 .$$

Derivando questa relazione prima rispetto ad u, poi rispetto a v, e sottraendo i risultati si ottiene:

$$\frac{1}{2} f''(u+v)\frac{d^2\varphi^2}{du^2}+f'''(u+v)\frac{d\varphi^2}{du},$$

ovvero.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{d\varphi^2}{du}=-(\log f'')'$$

Ciò non può essere a meno che non si abbia:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{d\varphi^2}{du}=c \quad , \quad (\log f'')'=-c,$$

dove c è una costante. Ne risulta:

$$\frac{d\varphi^2}{du}=\mathrm{C}\,e^{2cu} \quad , \quad f''=\mathrm{C}'e^{-c(u+v)}$$

e integrando di nuovo:

$$\varphi^2(u)=\frac{\mathrm{C}}{2c}e^{2cu}+\mathrm{C}'' \quad , \quad f'=-\frac{\mathrm{C}'}{c}e^{-c(u+v)}+\mathrm{C}''',$$

dove C , C′ , C″ , C‴ sono nuove costanti. Se si sostituiscono questi valori nella (36) si vede che, per soddisfarla effettivamente bisogna prendere: $\mathrm{C}''=-\frac{1}{c^2}$, $\mathrm{C}'''=0$. Come si vedrà facilmente dopo tutto ciò, $\sqrt{\mathrm{E}'}$, $\sqrt{\mathrm{G}'}$ si possono ridurre ad essere funzioni della sola u, quindi le deformate sono moulures. Inoltre, poichè: $f'=-\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{-c(u+v)}$, l'elemento lineare delle nostre superficie di rivoluzione è dato dalla formula:

$$ds^2 = du^2 + \left(\alpha\, e^{c(u+v)} + \beta\right)^2 dv^2,$$

dove α, β, c sono costanti arbitrarie. Queste superficie di rivoluzione erano già state trovate dal Prof. Dini (Giornale di Napoli Anno 1865, P.ª 70).

21. — Consideriamo ora il caso in cui nelle formule del N.° precedente si abbia $r_2 = \varphi(u) = a$, dove a è una costante; se la soluzione esiste, la superficie primitiva dovrà essere una superficie canale. In questo caso la (33') diviene:

$$f'''(u+v) + \frac{1}{a} f'(u+v) = 0,$$

che integrata dà:

$$f(u+v) = \mathrm{A} \cos\left(\frac{u+v}{a} + \mathrm{B}\right) + \mathrm{C},$$

dove A, B, C sono costanti arbitrarie. Si conclude quindi che la superficie di rivoluzione, il cui elemento lineare è dato dalla formola:

$$(37) \quad ds^2 = du^2 + \left\{\mathrm{A} \cos\left(\frac{u+v}{a} + \mathrm{B}\right) + \mathrm{C}\right\}^2 dv^2$$

può deformarsi nel modo voluto e la deformata è una superficie canale. Confrontando poi la formula precedente colla (16) del N.° 13, si vede che questa forma dell'elemento lineare conviene alla superficie canale, la cui direttrice è un'elica circolare, a meno che non sia $\mathrm{C} = 0$; ma ciò porterebbe che si avesse $r_1 = a = r_2$, cioè la deformata sarebbe una sfera. Siccome poi una superficie canale a direttrice

gobba non può deformarsi conservando le linee di curvatura, se ne conclude che la circostanza voluta si presenta per la superficie di rivoluzione (37) esclusivamente quando si trasforma nella canale, la cui direttrice è un' elica circolare.

Riassumendo i risultati ottenuti, possiamo dunque dire: « La classe completa di superficie di rivoluzione, per le « quali colla deformazione della superficie si può ridurre un « sistema di geodetiche, di cui i paralleli sono traiettorie, « linee di curvatura della deformata, è costituita dalle « superficie di rivoluzione applicabili sopra moulures in « modo che ai profili di queste corrispondano le geodetiche « del detto sistema, e dalle superficie di rivoluzione appli- « cabili sulle canali aventi a direttrice un' elica circolare. « La circostanza voluta si presenta poi esclusivamente per « le prime quando si trasformano nelle moulures corri- « spondenti e per le seconde quando si trasformano nelle « corrispondenti canali ».

22. — Generalizzando la questione trattata nei numeri precedenti, ricerchiamo se è possibile deformare una superficie di rivoluzione in modo che un sistema di linee, di cui i paralleli sono traiettorie (sotto angolo variabile in generale da un parallelo all'altro), diventi un sistema di linee di curvatura per la superficie deformata. Prendendo il sistema suddetto a linee v e le traiettorie ortogonali a linee u, l' elemento lineare assumerà la forma (Dini Giornale di Napoli 1865, P.ª 251):

$$ds^2 = f^2(u+v)du^2 + \varphi^2(u+v)dv$$

e si potrà in generale stabilire tra f e φ una relazione qualunque senza particolarizzare la superficie di rivoluzione, ma determinando solo convenientemente la legge, con cui l'angolo dei paralleli colle linee v varia da un parallelo all'altro.

Ciò posto, le equazioni (29), (30) mostrano che r_1 r_2 si dovranno prendere funzioni di $u+v$, a meno che la (30) non fosse un' identità; ma questo caso è già stato considerato a parte al N.° 20 e perciò ora lo intenderemo escluso. Dovendo essere r_1 r_2 funzioni di $u+v$ le (25) s'integrano subito e danno:

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2}=C\displaystyle\int\frac{df}{f^2\varphi}+C' \\ \dfrac{1}{r_1}=C\displaystyle\int\frac{df}{f^2\varphi}+C'+\dfrac{C}{f\varphi}. \end{cases}$$

Rimarrà a soddisfare la (29), il che si potrà sempre fare in infiniti modi perchè ciò stabilisce semplicemente un'equazione differenziale tra f e φ. Osserviamo poi che $\sqrt{E'}$, $\sqrt{G'}$ divengono anch' esse funzioni di $u+v$, cioè l' elemento lineare sferico assume la forma:

$$ds'^2=f_1^2(u+v)du^2+\varphi_1^2(u+v)dv^2.$$

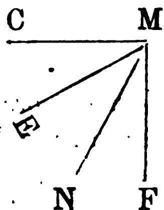
Vogliamo ora dimostrare che le superficie deformate sono elicoidi, per il che basterà provare che linee $u+v=\text{cost}$ sulle superficie deformate sono eliche circolari dello stesso passo, descritte su cilindri concentrici.

Le linee $u+v=\text{cost}$ sono caratterizzate sulle superficie deformate S dalle seguenti proprietà: sono a curvatura geodetica costante, sono parallele geodeticamente fra loro, sono traiettorie delle linee di curvatura, lungo di esse non variano i raggi di curvatura principale e, siccome le loro immagini sferiche sono un sistema di paralleli, la normale alla superficie lungo ciascuna di esse fa un angolo costante con una direzione fissa F, la normale comune ai piani di quei paralleli.

Consideriamo ora una individuata linea $u+v=\text{cost}$ che

chiameremo E; se si osserva che essa taglia sotto un angolo costante le linee di curvatura e che lungo E non variano i raggi di curvatura principale di S, si vedrà subito, per le formole che legano i raggi di curvatura delle sezioni normali di una superficie, che è costante il raggio di curvatura della sezione normale tangente ad E. Quindi la linea E, avendo costante la curvatura normale e la curvatura geodetica, avrà costante il raggio di prima curvatura e sarà pur costante l'angolo che la sua normale principale forma colla normale alla superficie.

Ma se consideriamo un sistema C, di linee di curvatura di S, siccome le loro immagini sferiche sono linee di cui i paralleli sono traiettorie, e siccome nella rappresentazione le tangenti alle linee di curvatura della superficie rappresentata sono parallele alle tangenti nei corrispondenti punti delle immagini sferiche, si vede che le tangenti alle linee C nei punti di E formano un angolo costante colla direzione fissa F. Ora se consideriamo un punto qualunque M di E, l'elemento MC della linea di curvatura del sistema C che parte da M, la normale MN ad S e la direzione fissa MF, siccome al variare di M sulla linea E non variano le tre facce del triedro M.CNF così non variano nemmeno gli angoli diedri e in particolare l'angolo del piano MNC col piano MNF. Ma se ME è l'elemento di linea E uscente da M, al variare di M su E l'angolo CME non varia, cioè non varia l'angolo dei piani MNC, MNE, dunque non varia l'angolo dei piani MNE, MNF. Ora nel triedro M.ENF sono costanti le due facce NME, NMF e l'angolo diedro MNEF, quindi è costante anche l'altra faccia, cioè le tangenti alla linea E fanno un angolo costante colla direzione fissa F. Da tutto ciò risulta intanto che la linea E è un'elica circolare, descritta sopra un cilindro parallelo alla direzione F.



Consideriamo ora la linea E e gli elementi geodetici che partono dai varii punti di E normalmente alla E stessa sulla superficie S; il luogo degli estremi di lunghezze eguali di questi elementi è una nuova linea $u+v$ che diremo E'. Ma da tutto ciò che si è detto avanti risulta che questi elementi geodetici formano un angolo costante colla normale principale di E, quindi (V.N.11) E' è descritta sopra un cilindro concentrico a quello su cui è descritta E ed ha lo stesso passo di quest'ultima. La superficie deformata S è quindi un elicoide e perciò possiamo enunciare il teorema. « Ogni super-« ficie di rivoluzione può deformarsi in modo che un sistema « conveniente di linee, di cui i paralleli sono traiettorie, « diventi un sistema di linee di curvatura per la superficie « deformata. Questi sistemi sono inoltre in numero infinito « e le deformate sono elicoidi ».

Fa eccezione il caso in cui quel sistema sia formato di geodetiche, allora oltre le deformazioni elicoidali si hanno le deformazioni in superficie moulures, come già si è detto al N.° 20.

Osservazione. Dal processo di dimostrazione ora tenuto si possono dedurre alcune proprietà degli elicoidi.

Poichè le normali all'elicoide nei varii punti dell'elica E fanno lo stesso angolo colla normale principale dell'elica stessa, il luogo degli estremi di lunghezze eguali di queste normali è un'altra elica circolare dello stesso passo di E e descritta sopra un cilindro concentrico a quello su cui la E stessa è descritta (N.° 11). Quindi se si ripete la stessa costruzione su tutte le eliche dell'elicoide, facendo variare con continuità da un'elica all'altra quel segmento di normale, il luogo di tutti gli estremi di quei segmenti sarà un nuovo elicoide. Come casi particolari del teorema precedente possiamo enunciare i teoremi:

« L'evoluta di un elicoide è un altro elicoide ».

« Le superficie parallele ad un elicoide sono altrettanti « elicoidi ».

23. — Supponiamo nelle formole del N.° precedente $\varphi = a\,f$, dove a è una costante, cioè ricerchiamo se esistono superficie di rivoluzione, per le quali delle traiettorie sotto lo stesso angolo dei paralleli possono diventare linee di curvatura delle deformate. Le (38) ci daranno:

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{2c} + \dfrac{C}{f^2(u+v)} \\ \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{2c} - \dfrac{C}{f^2(u+v)} \end{cases}$$

dove c , C sono costanti arbitrarie.

Cominciamo dal prendere $c=\infty$; allora si ha:

$$(40)\qquad \frac{1}{r_2} = \frac{C}{f^2(u+v)}\ ,\quad \frac{1}{r_1} = -\frac{C}{f^2(u+v)}$$

e le deformate sono quindi elicoidi ad area minima. Per determinare poi la f, la (29) ci darà la equazione differenziale:

$$f''f - f'^2 = \frac{a^2C^2}{1+a^2}$$

e integrando:

$$(41)\qquad f = \frac{a\,C}{C'\sqrt{a^2\ 1}} \cos h\, C'(u+v)\ ,$$

dove C′ è una costante arbitraria e l'altra si è lasciata, perchè non modifica la soluzione. Quindi l'elemento lineare della superficie di rivoluzione richiesta assumerà la forma:

$$ds^2 = \frac{a^2 C^2}{C'^2(a^2+1)} \cos h^2 C'(u+v)[du^2 + a^2 dv^2].$$

Ora col metodo del N.° 4 si troverà, per determinare la curva meridiana $z=\psi(r)$ la equazione:

$$1+\psi'^2(r) = \frac{a^2 r^2}{h^2(a^2+1)^2 \left\{ C'^2 r^2 - k^2 a^2 C^2 \right\}},$$

dove k è arbitraria. Prendendo $k=\dfrac{a}{C'(a^2+1)}$ troveremo:

$$r = m \cos h \frac{z}{m}$$

dove per brevità si è posto $m=\dfrac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)}$; la superficie di rivoluzione richiesta è quindi un' alisseide.

Osserviamo di più che qualunque sia a, possiamo disporre di C, C′ in modo che m abbia un valore stabilito avanti; quindi una stessa alisseide (ed ogni sua deformata di rivoluzione) può deformarsi in modo che un sistema qualunque di traiettorie sotto lo stesso angolo dei paralleli diventi un sistema di linee di curvatura della deformata. Questo teoréma è un caso particolare di un altro già noto (V. N.° 25), però il nostro metodo ci dà anche il modo di determinare in termini finiti le equazioni delle deformate, ciò che ora faremo.

24. — L'elemento lineare sferico corrispondente alle deformate considerate nel N.° precedente assume la forma:

$$(42) \quad ds'^2 = \frac{C'^2(a^2+1)}{a^2 \cos h^2 C'(u+v)} \left\{ du^2 + a^2 dv^2 \right\}$$

quindi ad ogni deformazione dell'alisseide del genere sopra considerato corrisponde sulla sfera un sistema di traiettorie sotto lo stesso angolo di un sistema di meridiani, e l'angolo che definisce queste lossodromie sulla sfera, è lo stesso di quello che fanno le linee di curvatura della deformata con quelle che erano linee di curvatura della superficie primitiva. Ora osserviamo che l'elemento lineare (42) si deduce dall'ordinario sferico: $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\omega^2$ colle sostituzioni:

$$\cos\theta = \frac{1}{\cos h\, C'(u+v)}\ ,\quad \omega = \frac{C'}{a}(a^2v-u).$$

Le coordinate X, Y, Z dei punti della sfera, che espresse per θ, ω sono:

$$X = \cos\theta\cos\omega\ ,\quad Y = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\omega\ ,\quad Z = \mathrm{sen}\,\theta,$$

quando si esprimano per u, v saranno date dalle formule seguenti:

$$(43)\quad X = \frac{\cos\frac{C'}{a}(a^2v-u)}{\cos h\, C'(u+v)}\ ,\ Y = \frac{\mathrm{sen}\frac{C'}{a}(a^2v-u)}{\cos h\, C'(u+v)}\ ,\ Z = \mathrm{tang}\, h\, C'(u+v)$$

Derivando queste formole ed avendo riguardo alle altre:

$$r_1 = -\frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)}\cos h^2 C'(u+v)\ ,\ r_2 = \frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)}\cos h^2 C'(u+v)$$

si otterranno le coordinate ξ, η, ζ delle deformate mediante le formule (32) del N.° 17. Facendo le sostituzioni ed eseguendo le quadrature ivi indicate, si otterrà facilmente:

$$
(44)\left\{\begin{aligned}
\xi &= -\frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)^2}\Big\{(a^2-1)\cos hC'(u+v)\cos\frac{C'}{a}(a^2v-u)-\\
&\qquad -2\,\mathrm{sen}\,hC'(u+v)\,\mathrm{sen}\frac{C'}{a}(a^2v-u)\Big\}\\
\eta &= -\frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)^2}\Big\{(a^2-1)\cos hC'(u+v)\,\mathrm{sen}\frac{C'}{a}(a^2v-u)+\\
&\qquad +2a\,\mathrm{sen}\,h\,C'(u+v)\cos\frac{C'}{a}(a^2v-u)\Big\}\\
\zeta &= -\frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)}(v-u) = -\frac{a^2 C}{C'(a^2+1)}\\
&\qquad \Big\{\frac{1-a^2}{1+a^2}(u+v)+\frac{2(a^2v-u)}{1+a^2}\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Queste relazioni definiscono un elicoide generato dalla curva gobba:

$$
x = -\frac{a^2(a^2-)C}{C'^2(a^2+1)^2}\cos h\omega\,,\; y = -\frac{2a^3C}{C'^2(a^2+1)^2}\,\mathrm{sen}\,h\omega\,,\; z = \frac{a^2(a^2-1)C}{C'^2(a^2+1)^2}\,\omega
$$

attorno all'asse z. Questa curva si proietta sul piano xy secondo un'iperbola, il cui asse reale è l'asse delle x e sul piano x, z secondo una catenaria comune.

Nel caso di $a=1$, cioè nel caso in cui le lossodromiche siano inclinate di 45° sui meridiani, le formule precedenti definiscono un elicoide gobbo ad area minima, il quale rimane invariato, finchè tale rimane il rapporto $\frac{C}{C'^2}$.

Osserviamo poi che sulle superficie deformate le linee $a^2v-u=\text{cost}$ sono le traiettorie ortogonali delle $u+v=\text{cost}$, cioè sono le trasformate dei meridiani dell'alisseide ovvero delle generatrici dell'elicoide gobbo ad area minima, su cui l'alisseide stessa è applicabile. Ora per le (43) le immagini sferiche delle linee $a^2v-u=\text{cost}$ sono il sistema di meri-

diani ω=cost (*), quindi le normali all'elicoide lungo una linea a^2v-u=cost, cioè le normali principali di questa linea sono parallele al piano del meridiano corrispondente. Ciò porta subito a concludere che le a^2v-u=cost sono eliche cilindriche e che i cilindri su cui sono tracciate hanno le generatrici perpendicolari all'asse comune delle eliche $u+v$=cost. Gli elicoidi (44) coincidono quindi colle superficie trovate dal Prof. Dini nelle sue *Ricerche sopra la teorica delle superficie* §. 30.

25. — Come già ho osservato, la proprietà ritrovata per l'alisseide non è particolare a questa superficie; essa si estende a tutte le superficie ad area minima, per le quali si può enunciare il teorema seguente (Salmon — Analytische Geometrie des Raumes, II. Auflage S. 685): «Ogni « superficie ad area minima può deformarsi in modo che « si conservi ad area minima e le traiettorie sotto un « angolo costante qualunque delle sue linee di curvatura « diventino linee di curvatura per la superficie deformata ». Per dimostrare col nostro metodo questo teorema, ricordiamo che l'elemento lineare di una superficie ad area minima, riferito alle linee di curvatura t , ω, assume la forma:

$$(45) \qquad ds^2=\lambda\,(dt^2+d\omega^2)$$

e il corrispondente sferico assume l'altra:

$$(46) \qquad ds'^2=\frac{1}{\lambda}(dt^2+d\omega^2).$$

Si trasformi ora l'elemento lineare (45), prendendo a linee coordinate le traiettorie u sotto lo stesso angolo

(*) Ciò risulta del resto anche dall'osservare che nella rappresentazione sferica di Gauss di una superficie ad area minima gli angoli vengono conservati.

delle t e le traiettorie ortogonali v delle linee u. Si vedrà subito che per formole di trasformazione si potranno prendere le seguenti:

$$(47) \quad t = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u+av) \quad , \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(au-v),$$

dove a è la tangente dell'angolo che le v fanno colle t. Se si indica con λ' ciò che diviene λ, facendovi le sostituzioni (47), l'elemento lineare (45) diverrà:

$$(48) \quad ds^2 = \lambda'(du^2+dv^2).$$

Ora colle osservazioni generali fatte al N.° 17 si vedrà che se l'elemento lineare sferico potrà assumere la forma:

$$(49) \quad ds'^2 = \frac{1}{\lambda'}(du^2+dv^2),$$

esisterà effettivamente una superficie ad area minima, il cui elemento lineare riferito alle linee di curvatura assume la forma (48). Ora colle sostituzioni (47) l'elemento lineare sferico (46) si cangia appunto nell'altro (49), quindi il teorema è dimostrato.

Si scorge poi facilmente che due superficie ad area minima deformate l'una dell'altra secondo la legge detta godono anche della proprietà che le loro normali nei punti corrispondenti sono parallele.

Nel caso particolare di $a=1$ le linee di curvatura della deformata sono le assintotiche della primitiva e si hanno le superficie ad area minima coniugate in applicabilità del Bonnet.

26. — Riprendiamo le formule (39), supponendovi c qualunque; allora le deformate sono elicoidi a curvatura

media costante: $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{c}$. La (29) del N.° 17 ci darà per determinare f la equazione differenziale:

$$ff''-f'^2=\frac{a^2}{1+a^2}\left(C^2-\frac{f^4}{4c^2}\right),$$

che si riduce subito alle quadrature e dà:

$$u+v=\int\frac{df}{\sqrt{-\frac{a^2}{4c^2(1+a^2)}f^4+C'f^2-\frac{a^2C^2}{1+a^2}}}$$

dove C′ è una costante arbitraria. Questa relazione si può scrivere:

$$(50)\qquad u+v=\frac{2c\sqrt{1+a^2}}{i\,a}\int\frac{df}{\sqrt{(\alpha-f^2)(\beta-f^2)}},$$

quando con α, β si indichino le radici dell' equazione di 2.° grado:

$$x^2-\frac{4C'(1+a^2)c^2}{a^2}x+4C^2c^2=0;$$

queste radici, intendendo che C′ sia positiva, saranno ambedue positive. Dalla (50) introducendo le funzioni ellittiche si ottiene:

$$f(u+v)=\sqrt{\alpha}\,sn\left(\frac{i\,a\sqrt{\beta}}{2c\sqrt{1+a^2}}(u+v)+A\,,\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right),$$

dove A è una costante arbitraria di cui potremo disporre in modo da far sparire l'immaginario (V. N.° 8).

Potremo prendere:

$$f(u+v)=\sqrt{\beta}\, dn\left(\frac{a\sqrt{\beta}}{2c\sqrt{1+a^2}}(u+v)\ ,\ \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\right)$$

Determinata così la forma della funzione f, si troverà col modo indicato al N.° 4 la seguente equazione differenziale per determinare la curva meridiana $z=\psi(r)$ della superficie di rivoluzione richiesta:

$$(51)\qquad 1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{4\,c^2\,r^2}{\left(r^2-k^2\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(k^2-r^2\right)}$$

la quale rimane invariata; finchè tali rimangono c, k, $\frac{\alpha}{\beta}$ e siccome dati c ed a possiamo sempre disporre di C, C′ in modo che $\frac{\alpha}{\beta}$ abbia un valore stabilito avanti, la superficie di rivoluzione che ha per meridiano la curva (51) può, come l'alisseide, deformarsi in modo che un sistema qualunque di traiettorie sotto lo stesso angolo dei meridiani diventi un sistema di linee di curvatura della deformata. Ma la (51), disponendo convenientemente dell'arbitraria k, può scriversi:

$$\frac{dz}{dr}=\frac{r^2\pm b^2}{\sqrt{4c^2r^2-(r^2\pm b^2)^2}}$$

Ora questa equazione differenziale appartiene alla curva generata dal fuoco di un'ellisse o di un'iperbola, che rotola senza strisciare sull'asse z; la superficie di rivoluzione generata da questa curva ruotando attorno all'asse z è inoltre a curvatura media costante $\frac{1}{c}$ (V. Serr. Cal. Int. §. 712). Possiamo quindi enunciare il teorema: « La superficie di

« rivoluzione, che ha per meridiano la curva generata dal « fuoco di un' ellisse o di un' iperbola, che senza strisciare « rotola sull'asse della superficie, si può deformare in infi- « niti modi, pur conservandosi a curvatura media costante, « e ciascun sistema di traiettorie sotto lo stesso angolo dei « meridiani diventa una volta un sistema di linee di curva- « tura della deformata ». . . . .

Allorquando l'ellisse degenera in una parabola, il meridiano di questa superficie di rivoluzione diviene la catenaria e si ha la proprietà già osservata dell' alisseide. Osserviamo da ultimo che le superficie considerate nei Numeri 23, 25 e nel presente sono superficie in cui un raggio di curvatura è funzione dell' altro, e quando si deformano nel modo considerato conservano ancora invariati in ciascun punto i raggi principali di curvatura, sicchè per il teorema di Weingarten anche le evolute delle successive deformate sono applicabili sull' evoluta della superficie primitiva.

LUIGI BIANCHI.

SULLA TEORIA
DELLE LINEE DI CURVATURA

TESI

PER L'ESAME DI ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO

Presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa

DAL

D.r MICHELE GREMIGNI

INTRODUZIONE

Nel lavoro che qui ho l'onore di presentare, prendo a studiare le linee tracciate sopra le superficie, e più specialmente, quelle che si distinguono col nome di *linee di curvatura*.

La scoperta di queste linee è dovuta a *Monge;* il quale ne dimostrava l'esistenza insieme a molte delle loro proprietà, quando i suoi studi avevano tutt'altro di mira che la teoria delle superficie. Ecco come l'illustre geometra veniva a fare una delle sue più belle ed importanti scoperte.

Verso la fine del secolo passato, e precisamente nell'anno 1781, pubblicava egli una Memoria intitolata: — *Théorie des déblais et des remblais* — nella quale, propostosi di risolvere dal lato economico la questione del trasporto delle terre, si formulava il seguente problema: «dati « due volumi eguali di materia, trovare nel secondo volume

« il punto ove dev'essere trasportata ciascuna molecola del « primo, perchè la somma de' prodotti delle molecole mol- « tiplicate ciascuna per lo spazio percorso sia un minimo. » Fu appunto in questa circostanza che egli, ammettendo che fra i due volumi dati non vi fossero ostacoli, ed osservando che per avere il minimo richiesto bisognava che le molecole si muovessero in linea retta, venne nella necessità di studiare i sistemi di rette nello spazio che obbediscono ad una data legge. E trovò allora che è possibile determinare la detta legge in modo che attorno ad ogni retta del sistema ne esistano in generale altre due, infinitamente vicine, tali che godano della proprietà di essere con essa in un medesimo piano; e che questi due piani siano perpendicolari tra di loro. Egli dimostrò inoltre, e quì sta il punto interessante, che tal proprietà appartiene esclusivamente alle normali ad una stessa superficie; per cui egli fu in grado d'enunciare la proposizione che segue: « tutte le « normali d' una superficie qualsivoglia, sono sempre le « intersezioni di due serie di superficie sviluppabili, tali « che ciascuna superficie della prima serie taglia tutte « quelle della seconda in linee rette e ad angolo retto, e « reciprocamente ».

Tale proposizione, mentre permetteva a *Monge* di risolvere la questione che si era proposto, questione che poi rimase incompleta e di nessuna importanza, apriva altresì al medesimo la via a nuovi studi e a nuove scoperte. E' seppe infatti collegare i suoi resultati con quelli che ventun' anno avanti (1760) erano stati ottenuti da *Euler*, dimostrando che i punti ove ciascuna normale è tagliata dalle due normali infinitamente vicine, sono precisamente le estremità dei due raggi di curvatura massima e minima; di maniera che le intersezioni della superficie colle sviluppabili d' una serie vengono ad essere le linee di curvatura massima, e le intersezioni colle sviluppabili

dell'altra serie vengon ad essere le linee di curvatura minima.

Continuando poi le sue ricerche, *Monge* si occupò anche di diversi casi particolari. Studiò le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane e situate in piani paralleli, e ne trovò le equazioni in termini finiti; studiò pure le superficie che hanno un raggio di curvatura costante, quelle in cui i due raggi di curvatura principali sono eguali e dello stesso segno o di segno contrario; ed infine stabilì il modo di generazione delle superficie di cui le normali sono tangenti ad un cono retto, o ad una superficie sviluppabile in generale.

Dopo i lavori di *Monge*, altri distinti geometri s'occuparono della teoria delle linee di curvatura. E fra questi sono da notarsi principalmente *Dupin* che dimostrò un bellissimo teorema sui sistemi tripli di superficie ortogonali; *Joachimstal*, al quale si deve il teorema che se una linea di curvatura è piana il suo piano taglia la superficie sotto un angolo costante; *Serret* e *Bonnet* i quali nel 1853 pubblicarono dei bellissimi resultati intorno alle superficie che hanno le linee di curvatura piane o sferiche: ed in particolare quest' ultimo dette pel primo l'equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane; *Picart* ha pure studiato le superficie aventi le linee di curvatura piane o sferiche, ed ha pubblicato una bellissima Memoria, di cui è il resoconto nel vol. 46 dei *Comptes rendus* dell'anno 1858, *Weingarten* ha per il primo fatto attenzione alla proprietà, dimostrata da *Monge*, che nella superficie de' centri di curvatura (massima o minima), le linee evolute di quelle di curvatura corrispondenti costituiscono un sistema di geodetiche di questa medesima superficie, ed ha quindi dimostrato un elegante teorema sulle superficie evolute di quelle nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro. Ulteriori studi poi sono stati

fatti anche da altri geometri; e qui ricordando fra gli altri i lavori del Prof. *Dini* dirò che per mezzo di formole semplicissime, da lui stesso stabilite, egli ha trovato sotto una forma nuova e di un' applicazione assai facile le equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane, ed ha fatto conoscere tutte le superficie nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell'altro, e le linee di curvatura d'un solo o di tutti e due i sistemi sono piane. Ha poi, sulle superficie aventi un sistema di linee di curvatura sferiche, dato un teorema, per mezzo del quale in varii casi la ricerca di tali superficie è resa semplice; ed infine, generalizzando il teorema di *Weingarten*, ha fatto conoscere come i problemi sulle superficie applicabili su una data superficie potevano farsi dipendere da quelli sulle superficie evolute di altre superficie; e viceversa.

Riassunte così in brevi parole le principali nozioni storiche sulla teoria delle linee di curvatura, passo ora ad esporre sommariamente il contenuto di questa tesi, la quale, per la novità di alcuni dei risultati che in essa si trovano, e per il metodo di esposizione adottato, spero non sarà trovata del tutto priva di un certo interesse.

Io divido il mio lavoro in quattro parti. Nella prima di queste stabilita anzitutto una nota espressione semplicissima per il raggio di curvatura d'una linea piana, passo a dare, fondandomi esclusivamente sul metodo degli infinitamente piccoli, una nuova dimostrazione del teorema di *Monge*, generalizzato da *Bertrand*; e quindi, ritrovata la formola d'*Euler*, vengo per altra via a provar l'esistenza sopra ogni superficie delle linee di curvatura. Dipoi, definita la superficie evoluta relativa ad un sistema di queste linee, ritrovo la notevole proprietà che, su essa, le evolute delle linee di curvatura corrispondenti costituiscono un sistema di geodetiche.

Nella seconda parte, dopo d'aver dimostrato, indipendentemente però dalla considerazione dell'indicatrice di *Dupin*, che le tangenti alle linee di curvatura del secondo sistema, lungo i punti d'una linea qualunque del primo, formano una superficie sviluppabile, la quale è per conseguenza circoscritta alla superficie data lungo questa medesima linea, trovo che le porzioni di dette tangenti comprese fra la linea di curvatura considerata e lo spigolo di regresso della sviluppabile, misurano i raggi di curvatura geodetica relativi a' punti della linea di curvatura stessa. Egli è perciò che dopo d'aver messa in evidenza l'analogia che esiste fra la sviluppabile delle normali e la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo una stessa linea di curvatura, faccio osservare che come gli estremi de' raggi di curvatura principali relativi ad un sistema di linee di curvatura sono situati in una medesima superficie, (la superficie evoluta di quella considerata) così le estremità de' raggi di curvatura geodetica relativi al medesimo sistema son pure situati sopra una nuova superficie, che chiamo la *superficie de' centri geodetici delle linee di curvatura di quel sistema.*

Dopo di che, rivolgo la mia attenzione allo studio di questa nuova superficie, e dimostro che, su essa, le evolute delle linee di curvatura corrispondenti non godono della medesima proprietà di quelle tracciate sopra la superficie evoluta, altro che nel caso particolare che il secondo sistema di linee di curvatura sia formato di geodetiche; nel qual caso, si vede facilmente che son comprese anche le superficie canali e le superficie *moulures.*

Ritrovo quindi il teorema di *Brioschi* sulle superficie che hanno le linee di curvatura didonie; e dopo d'aver enunciata una proprietà notevole di cui godono le rette polari d'una linea di curvatura qualsivoglia stabilisco una relazione semplicissima che esiste fra la curvatura ordinaria e quella

geodetica ne' punti d'una stessa linea di curvatura e la curvatura della sezione principale corrispondente.

La terza parte poi l' ho destinata a riassumere e dimostrare con un sol metodo le principali proposizioni della teoria delle linee di curvatura; e faccio quindi conoscere una proprietà delle superficie studiate da *Picart*, di quelle, cioè, che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche e situate su sfere concentriche.

Finalmente nella quarta parte, traendo sempre profitto dalle considerazioni svolte nella seconda, stabilisco due formole semplicissime per mezzo delle quali ritrovo molto facilmente, quelle differenziali del Prof. *Dini* fra i raggi di curvatura principali e i coefficienti dell'elemento lineare della superficie. Ritrovo quindi il teorema che le superficie sviluppabili sono le sole superficie che abbiano un raggio di curvatura infinito, ed infine ottenuto l' elemento lineare della superficie dei centri geodetici, ne faccio il confronto con quello della superficie evoluta, e me ne servo per confermare i resultati precedentemente ottenuti.

I.

1. Per procedere con ordine in questi studi prima di dimostrare come sopra ogni superficie (*) esistano delle linee che godono di speciali proprietà, e che si distinguono col nome di *linee di curvatura*, fa d'uopo ch' io ritrovi una nota espressione semplicissima del raggio di curvatura d'una linea piana.

È noto che per ogni punto d'una linea piana qualsi-

(*) Diró una volta per tutte che in questa tesi suppongo sempre che nei punti delle linee e delle superficie che si considerano non si abbiano singolarità, in modo cioè che le loro coordinate siano funzioni finite e continue delle variabili indipendenti insieme a quelle fra le loro derivate che occorrerà di considerare, ec. . .

voglia esiste un cerchio, *il cerchio osculatore o cerchio di curvatura*, il quale oltr'essere tangente alla curva nel punto considerato, passa anche per un altro punto della medesima a quello infinitamente vicino, ed è tale inoltre che trascurando gl' infinitamente piccoli dell'ordine superiore al secondo, un suo arco infinitamente piccolo del primo ordine, contato a partire dal punto in questione, si può immaginar confuso coll'arco della curva, contato dallo stesso punto, e che sia stato assunto per infinitamente piccolo principale.

Preso adunque a considerare un punto M d'una curva piana, e il punto M′ ad esso infinitamente vicino, potremo all' infuori degli infinitamente piccoli del terzo ordine, essendo MM′ l' infinitamente piccolo principale, ritenere che l' arco MM′ appartenga al cerchio osculatore della curva in M. Allora condotta la tangente MT, e il diametro TM′N per una nota proprietà delle trasversali nel cerchio, sarà $MT^2 = TM' \times TN$; e chiamando R il raggio del cerchio, e denotando con h e k respettivamente le quantità infinitamente piccole MT ed M′T, si avrà

$$h^2 = k(2R + k)$$

Ora la quantità k, infinitamente piccola di fronte alla quantità finita 2 R, può esser trascurata, e perciò si può ritenere che sia:

$$h^2 = 2kR,$$

da cui ricavasi,

(1) $$R = \frac{h^2}{2k}$$

In questa espressione R è appunto il raggio di curvatura della linea nel punto M considerato; e perciò si può dire

che: « Il raggio di curvatura, in un punto d'una curva « piana, è eguale al quadrato d'una lunghezza infinita- « mente piccola contata sulla tangente a partire da questo « punto diviso pel doppio della porzione della normale alla « curva condotta dall'estremo di quella lunghezza, e com- « presa fra questo stesso estremo e la curva. ».

2. Dalla (1) deducesi subito che la quantità k è infinitamente piccola del secondo ordine. Se supponiamo che, rimanendo h costante, oppur variando d'una quantità infitamente piccola d'ordine superiore al primo, la quantità k venga per qualche modo a variare, e denotiamo con k' il nuovo valore ch'essa assume, e con R' il corrispondente di R, sarà

$$\mathrm{R}-\mathrm{R}'=\frac{h^2}{2}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}\right\}=\frac{h^2}{2}\frac{(k'-k)}{kk'};$$

dalla quale si vede che, se la differenza $k'-k$ è del secondo ordine, vale a dire è del medesimo ordine di k e k', l'altra differenza R—R' è una quantità finita.

A volere dunque che quest' ultima differenza sia infinitamente piccola, è necessario e sufficiente che $k'-k$ sia infinitamente piccola d' un ordine superiore al secondo. Ora, quando ciò avviene, per un teorema noto sugl' infinitamente piccoli, le due quantità k e k' potranno esser sempre sostituite l'una all'altra sia nella ricerca del limite d'un rapporto, che in quello d'una somma.

Così pure, per lo stesso teorema, nella (1), alla k potrà esser sostituita la lunghezza TM'', ossia la porzione di perpendicolare alla tangente inalzata dall' estremo T della lunghezza h, e compresa tra questo stesso estremo e la curva; perchè la differenza di queste due lunghezze, essendo l'angolo ch'esse fanno fra di loro eguale all'angolo di contingenza, è del terzo ordine, e perciò da trascurarsi. Lo stesso può dirsi d'un'altra lunghezza TM''' qualsivoglia

la quale faccia con TM', o con TM'', un angolo infinitamente piccolo.

Per le stesse ragioni anche alla h, può sostituirsi, o l'arco corrispondente della curva, o qualsivoglia altro infinitamente piccolo del primo ordine, purchè la differenza fra quello ed h, sia infinitamente piccola per rapporto a ciascuna di queste quantità. Tutte queste osservazioni saranno utili nella dimostrazione seguente.

3. Sia O un punto qualunque d'una superficie, OZ la normale corrispondente, ed OX, OY due rette ortogonali tracciate nel piano tangente in O. Consideriamo le sezioni OA, OB prodotte nella superficie dai piani ZOX e ZOY respettivamente; e da' punti a e b, presi respettivamente sulle rette OX ed OY a distanze eguali ed infinitamente piccole da O, si tirino a quelle sezioni le normali aAD, bBE; e poi s'immaginino condotti i piani passanti per queste rette, l'uno perpendicolarmente al piano ZOX, e l'altro al piano ZOY. Tali piani intersecano il piano XOY secondo le rette infinitamente piccole ac, bc; incontrantisi nel punto c, e la superficie secondo le curve AC, BC.

La tangente alla curva AC nel punto A non sarà in generale normale al piano ZOX, ma farà colla normale Ap a questo piano un angolo infinitamente piccolo del primo ordine. Dico che quest'angolo è eguale a quello che la normale AD_1 in A alla superficie fa col piano ZOX. Difatti, la normale in A alla superficie, essendo perpendicolare al piano tangente corrispondente, è pur perpendicolare a ciascuna delle rette At, At' tangenti respettive, nel punto A, alle due curve AC, AO. Ora l'esser perpendicolare ad At', fa sì ch'essa si trovi nel piano tAD; e l'esser perpendicolare ad At, vuol dire che fa con AD ossia col piano ZOX, un angolo eguale all'angolo tAp, come volevasi dimostrare.

Vediamo di trovare l'espressione di quest'angolo. Chiamandolo δ è chiaro che si ha:

$$\delta = \frac{pt}{Ap} = \frac{pc - tc}{Ap} = \frac{pc - (Cc - Ct)}{Ap} = \frac{pc + Ct - Cc}{Ap}$$

Ma per le osservazioni fatte nel numero precedente, è facile vedere che in questo rapporto possono sostituirsi a pc, Aa; a Ct, Bb; ad Ap, ac. Infatti, a pc può sostituirsi Aa, perchè l'angolo che queste due lunghezze fanno fra di loro essendo infinitamente piccolo, la loro differenza è del terzo ordine, e quindi trascurabile di fronte ad esse; a ct può sostituirsi Bb, perchè la superficie essendo continua il raggio di curvatura della OB nel punto O è infinitamente poco differente dal raggio di curvatura di AC in A, e quindi per una medesima lunghezza h nella (1), o per una lunghezza che ne differisca d'un ordine superiore al primo, le quantità k corrispondenti sono sostituibili l'una all'altra. Per ragioni analoghe possiamo infine alla Ap sostituire la ac. Resulta quindi da ciò che l'angolo δ ossia l'angolo DAD_1, è eguale al rapporto

$$\frac{Aa + Bb - Cc}{ac};$$

il quale è positivo o negativo a seconda che la tangente alla curva AC è al disotto o al disopra della parallela condotta da A alla ac ossia, a seconda che la AD_1 è al di dentro o al di fuori del diedro XOZY.

Ripetendo le medesime considerazioni per il punto B, si giungerà a provare che l'angolo EBE_1 è eguale all'altro rapporto

$$\frac{Aa + Bb - Cc}{bc},$$

e che, secondo che esso è positivo o negativo la normale BE_1 è pure, come la AD_1 situata nell'interno o all'esterno dell'angolo XOY. Ma le *ac* e *bc*, respettivamente eguali alle *Ob*, *Oa*, che sono state prese eguali, son pur eguali fra di loro, dunque i rapporti precedenti sono eguali, e così pure gli angoli DAD_1, EBE_1 sono uguali fra loro, il che costituisce appunto il celebre teorema di *Bertrand*, che enuncieremo così:

« Se in un punto qualunque O, preso sopra una super-
« ficie, si conduce la normale OZ, e poi, per O, si fanno
« passare sulla superficie due linee fra di loro ortogonali,
« sulle quali si prendono delle lunghezze infinitamente pic-
« cole eguali OA, OB, la normale in A farà col piano
« ZOA un angolo eguale a quello che la normale in B
« forma col piano ZOB; e di più, le due normali sono
« tutte e due nell'interno dell'angolo diedro AOB, o
« tutt' e due al di fuori ».

4. Supponiamo ora che il piano AOZ, girando attorno ad OZ venga a coincidere col piano BOZ; la normale alla superficie, nel punto A, varierà essa pure di posizione e finirà col sovrapporsi alla normale in B. Si vede adunque, per il teorema precedente, che ci deve essere almeno una posizione del piano mobile AOZ, nella quale la normale in A alla superficie è nel piano stesso ed incontra quindi la normale OZ infinitamente vicina. E come abbiamo dimostrato che ad ogni sezione normale, ne corrisponde sempre un' altra, in cui l' angolo indicato con δ è lo stesso, e queste sezioni sono in direzioni ortogonali fra di loro, ne viene che per ogni sezione, in cui quest' angolo è zero, ci sarà pure la sezione ad essa ortogonale, nella quale il suddetto angolo è pure zero. Resta così dimostrato che attorno ad un punto qualunque d'una superficie, ne esistono almeno due altri, ad esso infinitamente vicini ed in direzioni ortogonali fra di loro, tali che le normali alla super-

ficie condotte per essi incontrano la normale nel punto considerato.

Rimane però a vedersi che di tali coppie di direzioni ortogonali non ce n'è in generale che una. Per far ciò supponiamo che le sezioni normali O A, O B corrispondano ora ad una di quelle coppie ortogonali, nelle quali le normali alla superficie ne' punti infinitamente vicini ad O, incontrano la normale in questo punto.

Evidentemente, essendo zero l'angolo δ, dall' espressione (2) si ha qualunque siano O a, O b purchè infinitamente piccole dello stesso ordine

$$\text{(3)} \qquad Aa + Bb = Cc \quad .$$

Ora, se indichiamo con R_1, R_2 ed R i raggi di curvatura respettivi delle sezioni O A, O B, O C, nel punto O, e chiamiamo φ l'angolo a O c, per la (1), si ha pure

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2Aa}{Oa^2} ; \frac{1}{R_2} = \frac{2Bb}{O b^2} ; \frac{1}{R} = \frac{2 C c}{O c^2} ;$$

e quindi

$$A a = \frac{O a^2}{2R_1} ; B b = \frac{O b^2}{2 R_2} ; C c = \frac{O c^2}{2 R} .$$

Sostituendo ora nella (3), e facendo

$$O a = O c \cos \varphi \quad , \quad O b = O c \operatorname{sen} \varphi ,$$

trovasi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \operatorname{sen}^2 \varphi ,$$

che è la formula d' *Euler;* dalla quale si ricava

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \operatorname{sen}^2 \varphi$$

E di qui si vede, che supponendo per fissare le idee,

$\frac{1}{R_2} > \frac{1}{R_1}$, la $\frac{1}{R}$ è una funzione continua di φ, sempre crescente a misura che φ va da 0 a $\pm 90^0$, ed ha un sol minimo nel valore $\frac{1}{R_1}$, ed un sol massimo nell' altro $\frac{1}{R_2}$.

Ora, se oltre le direzioni $\varphi = 0$, $\varphi = 90^0$ se ne avessero per es. due altre $\varphi = \alpha$, $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ per le quali le normali infinitamente vicine alla superficie s' incontrassero, anche per quest' ultime i valori corrispondenti di $\frac{1}{R}$ dovrebbero essere l' uno massimo e l' altro minimo e questo è in contradizione con ciò che si è ora dimostrato; dunque possiamo ritenere come completamente provato che per ogni punto d' una superficie esistono due sole direzioni ortogonali fra di loro, nelle quali le normali alla superficie ne' punti infinitamente vicini a quello considerato godono della proprietà d' incontrare la normale in questo punto; e queste direzioni sono precisamente quelle che corrispondono alle sezioni di curvatura massima e minima.

Tali sezioni si dicono *le sezioni principali;* e i raggi di curvatura corrispondenti *raggi principali.*

5. Prendiamo ora a considerare un punto qualunque O d' una superficie, e siano A e B i due punti infinitamente vicini ne' quali le normali AC, BD alla superficie incontrano respettivamente in C e D la normale in O. Intorno ad A esistono pure, per le cose dette, altri due punti, ad esso infinitamente vicini A′ ed E, tali che le normali, in essi, alla superficie incontrano la normale in A. Consideriamo di questi punti quello che unito con A fa colla direzione O A un angolo infinitamente piccolo, e per esso ripetiamo lo stesso ragionamento. Verremo in questa guisa a trovare una serie di punti succedentisi con continuità, e tali che le normali alla superficie condotte per essi, s' in-

contrano due a due, e formano quindi una superficie sviluppabile.

Facendo altrettanto nella direzione OB; e poi ripetendo per ciascun punto della superficie quello che abbiamo detto per O, si vede come si possono così venire a tracciare sopra una superficie qualsivoglia due sistemi di linee ortogonali fra di loro, caratterizzate dalla proprietà che le normali alla superficie lungo i punti di ciascuna di esse formano una superficie sviluppabile. Sono queste le linee che si chiamano di *curvatura*.

Osservazione — Una linea geodetica d' una superficie non può esser linea di curvatura, se non quando è piana.

6. Ad ogni linea di curvatura O A A' . . . corrisponde la linea de' centri C , C' , C'' . . . , la quale, essendo lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile delle normali, è un' evoluta della prima linea.

Se immaginiamo ora che la linea di curvatura considerata muovendosi e cambiando convenientemente di forma, venga a sovrapporsi a tutte le altre linee di curvatura del medesimo sistema, e così a generare la superficie data, la linea dei centri corrispondenti genererà pur essa una superficie che gode della proprietà di essere tangente a tutte le normali della proposta. Quella superficie si chiama la superficie *evoluta* di questa.

Parrebbe a prima vista che le superficie sviluppabili formate colle normali relative ad un sistema di linee di curvatura toccassero la superficie evoluta corrispondente. Ma ciò non può essere per la ragione che due generatrici consecutive di ciascuna di quelle son tali che la linea che unisce i loro punti di contatto sulla evoluta, si confonde al limite con una delle stesse generatrici; e perciò non si può asserire che il piano formato dalle medesime, risulti tangente alla superficie evoluta. Tornando dunque a considerare il piano A O C del n.° precedente non si può dire che sia tangente alla superficie de' centri C.

Invece il piano O B C lo è certamente, perchè esso contiene oltre alle due tangenti O C , B G alla detta superficie; anche la retta che unisce i loro punti di contatto, la quale, al limite, è distinta da ciascuna di esse. Ciò vuol dire che il piano A O C, essendo perpendicolare a B O C, è normale alla superficie de' punti C; e la linea C C′, che ha per piani osculatori i piani come A O C, è una geodetica di questa stessa superficie. Dunque: « le linee che sulla super-« ficie de' centri di curvatura principali sono le evolute « delle linee di curvatura corrispondenti, costituiscono un « sistema di geodetiche di questa superficie ».

È questa la proprietà importante che dette luogo a *Weingarten* di dimostrare quel bel teorema sulle superficie evolute di quelle nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell' altro; e di cui ho fatto cenno nell' introduzione.

Quello che si è detto per un sistema di linee di curvatura si può ripetere per l'altro; e così è resa evidente l'esistenza di due superficie evolute d' una superficie data, che sono, tangenti a tutte le normali di questa e inoltre son tali che i piani tangenti dell' una, sono piani normali nell' altra.

II.

7. Sia ancora A A′ A″ . . . la linea di curvatura che si considera, e C C′ C″ . . . l'evoluta corrispondente formata dalle normali alla superficie. Si conducano le tangenti A G, A′ G′ . . . alle linee di curvatura dell' altro sistema lungo i punti della linea A A′ A″ . . . dico che esse formano una superficie sviluppabile. Difatti, le rette A G , A′ G′ . . . essendo tangenti alle linee di curvatura del secondo sistema, sono situate ne' piani G A C , G′ A′ C′ . . . , normali alla linea di curvatura A A′ A″. . . e fanno respettivamente

colle A G , A′C′ . . . corrispondenti (cioè, che partono dagli stessi punti di A A′ A″ . . .) un angolo retto; esse dunque costituiscono una serie continua di normali alla linea A A′ A″ . . . facenti un angolo costante colle normali corrispondenti dell'altra serie A C , A′C′ . . ., che già formano una superficie sviluppabile. Ora noi sappiamo che per passare da un' evoluta d' una linea qualsivoglia ad un' altra, basta far ruotare le normali che inviluppano la prima d'uno stesso angolo attorno al punto ove incontrano la curva, senza però farle uscire dal piano normale, ove ciascuna di esse è contenuta. Gli è perciò, che quando, applicando questa regola, si passa dall' evoluta C C′ . . . di A A′, a quella che si ottiene facendo girare le normali che la inviluppano d' un angolo retto, le nuove posizioni che queste vengono ad assumere sono evidentemente quelle delle tangenti A G , A′ G′ . . . Queste rette adunque debbono di necessità incontrarsi due a due, ne' punti G , G′. . . , e dar luogo quindi ad una superficie sviluppabile, come dovevasi provare.

8. Uniamo ora i punti C e G , C′ e G′ . . . ; saranno le rette C G , C′ G′ . . . , le generatrici della superficie delle rette polari della linea di curvatura A A′A″ . . . per cui se da un punto qualunque di questa linea, A per es., s'abbassa la perpendicolare A P sulla retta polare corrispondente C G, questa perpendicolare ci rappresenterà in grandezza e direzione il raggio di curvatura ordinaria della linea nel punto considerato. Inoltre, osservando che il piano osculatore in A della curva A A′ . . . contiene la A P e la tangente corrispondente ad A A′, e il piano tangente alla superficie nel medesimo punto contiene la A G e la stessa tangente; e le A G , A P sono situate nello stesso piano normale ad A A′ in A, si vede chiaro che l' angolo G A P, che la normale A P fa con G A, misura l' inclinazione del piano osculatore della linea di curva-

tura, sul piano tangente alla superficie. Perciò, se poniamo $AC = R_1$, $AP = \rho$, $PAG = \alpha$, $AG = R_g$, dal triangolo ACP, essendo l'angolo $C = \alpha$, avremo

$$(5) \qquad \rho = R_1 \operatorname{sen} \alpha$$

che non è altro che la formula di *Meunier* applicata alla linea di curvatura; e dal triangolo APG, avremo pure

$$(6) \qquad \frac{1}{R_g} = \frac{\cos \alpha}{\rho}$$

Ora da un teorema noto sappiamo che la curvatura geodetica in un punto d'una linea tracciata sopra una superficie è sempre eguale al prodotto della sua curvatura ordinaria in quel punto, per il coseno dell'angolo che il piano osculatore della linea fa col piano tangente alla superficie nel punto considerato. Segue adunque da ciò che il rapporto $\frac{1}{R_g} = \frac{1}{AG}$ ci rappresenta la curvatura geodetica della linea di curvatura al punto A, e che AG ne è il raggio di curvatura geodetica corrispondente. Dunque: « le « porzioni delle generatrici della superficie sviluppabile « circoscritta ad una superficie lungo una linea di curva- « tura, comprese fra i punti di questa e i punti corrispon- « denti dello spigolo di regresso rappresentano in grandezza « e direzione i raggi di curvatura geodetica relativi ai « punti della linea di curvatura stessa ».

I punti dello spigolo di regresso li chiameremo i *centri di curvatura geodetica corrispondenti* a' punti della linea di curvatura.

9. Immaginando ora che la linea di curvatura si muova, e modificandosi di forma, venga ad assumere la posizione di tutte le linee di curvatura del medesimo sistema, lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile circoscritta

alla superficie verrà a generare una nuova superficie che ha per tangenti le tangenti alle linee di curvatura del secondo sistema, e sulla quale si trovano i centri di curvatura geodetica delle linee del primo.

Si dirà questa la *superficie de' centri geodetici* relativa a tal sistema.

Lo stesso è a dirsi dell' altro sistema di linee di curvatura.

Si vede dunque: 1.° che mentre le normali ad una superficie lungo una linea di curvatura s' incontrano due a due, determinando i centri e i raggi di curvatura principali corrispondenti, le tangenti condotte all' altro sistema di linee di curvatura lungo i punti della linea in questione s' incontrano pure due a due, e determinano in tal maniera i centri e i raggi di curvatura geodetica corrispondenti a' suoi punti; 2.° che mentre gli spigoli di regresso delle sviluppabili delle normali relative a ciascuno de' sistemi di linee di curvatura generano una superficie a cui son tangenti tutte le normali della superficie data, gli spigoli di regresso invece delle sviluppabili circoscritte alla superficie secondo le linee di un medesimo sistema danno origine ad una superficie alla quale son tangenti soltanto le tangenti alle linee dell'altro sistema.

Si potrebbe ora aggiungere altresì che mentre ciascuna sviluppabile formata colle normali alla superficie lungo una linea di curvatura taglia tutte le sviluppabili appartenenti all' altro sistema secondo linee rette e ad angolo retto, invece ciascuna delle sviluppabili circoscritte alle linee di un sistema tocca tutte quelle dell' altro sistema secondo le tangenti alla corrispondente linea di contatto.

10. Abbiamo già veduto (n.° 6) che il piano GAC normale in A alla linea di curvatura A A'. . . è tangente in C alla superficie de' centri di curvatura principali corrispondente; e di più (n.° 8) che l'angolo ACG formato dalla retta

polare CG colla CA, è eguale all'angolo che il piano osculatore corrispondente della curva AA'... fa col piano tangente alla superficie nel medesimo punto A. Segue da ciò che: « nella evoluta di una superficie qualsivoglia, le direzioni coniugate delle tangenti d'una stessa geodetica che è l'evo-
« luta d'una linea di curvatura della superficie data, sono
« le rette polari di queste stesse linee; gli angoli che le
« medesime direzioni fanno colle stesse tangenti sono eguali
« a quelli che i piani osculatori corrispondenti fanno coi
« piani tangenti alla superficie; quelle direzioni contengono
« inoltre i centri geodetici corrispondenti delle linee di cur-
« vatura, ad una distanza dal punto di contatto che è
« eguale alla radice quadrata della somma de' quadrati del
« raggio di curvatura principale e del raggio di curvatura
« geodetico corrispondente ».

11. Dalle cose dette (n.° 8) resulta subito evidente un teorema dovuto al Prof. *Brioschi*, sulle superficie che hanno le linee di curvatura *didonie*, vale a dire a curvatura geodetica costante. Difatti, se una linea di curvatura ha la sua curvatura geodetica costante, la sviluppabile circoscritta alla superficie data lungo la medesima linea si riduce ad un cono, il vertice del quale si può considerare come il centro d'una sfera di raggio uguale al raggio di curvatura geodetica costante, e che taglia la superficie ad angolo retto secondo la linea di curvatura considerata. Possiamo quindi enunciare il seguente teorema del prof. *Brioschi*: « se una superficie ha un sistema di linee di
« curvatura didonie, queste sono anche sferiche ed'apparten-
« gono a sfere che tagliano ad angolo retto la superficie, e
« il cui raggio è eguale al raggio di curvatura geodetica
« delle stesse linee ».

Reciprocamente: « Se una superficie ha un sistema di
« linee di curvatura sferiche e tracciate su sfere normali
« alla superficie esse sono didonie ». In vero, con questa

ipotesi si vede subito che la sviluppabile circoscritta alla superficie secondo ciascuna linea di curvatura è un cono col vertice nel centro della sfera a cui quella linea appartiene, e che ha per conseguenza tutti i suoi lati eguali al raggio di questa. Dunque, il raggio di curvatura geodetica di ciascuna di queste linee è costante; e le medesime linee sono didonie.

12. Possiamo ora, servendoci delle formule (5) e (6) ricavare una relazione semplicissima che esiste fra la curvatura della sezione principale tangente in un punto ad una linea di curvatura, e le curvature ordinaria e geodetica di quella medesima linea nell stesso punto. Difatti, dalla (5) abbiamo

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho}$$

e dalla (6)

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\cos\alpha}{\rho}:$$

quadrando e sommando si ha appunto

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_g^2}=\frac{1}{\rho^2} \tag{7}$$

Dunque: « il quadrato della curvatura ordinaria in un « punto d'una linea di curvatura è eguale alla somma dei « quadrati della curvatura geodetica della medesima linea, « e della curvatura della sezione principale tangente alla « linea di curvatura nel punto considerato ».

13. Al n.° 6 abbiamo dimostrato che gli spigoli di regresso delle sviluppabili formate dalle normali alla superficie e corrispondenti ad un medesimo sistema di linee di curvatura, sono altrettante geodetiche della superficie dei centri di curvatura corrispondente. Vediamo ora, se tale proprietà si mantiene rispetto alla superficie de' centri

geodetici; se, cioè, gli spigoli di regresso della sviluppabile circoscritta alla superficie lungo ciascuna linea di curvatura del sistema considerato costituiscono un sistema di geodetiche della superficie de' medesimi centri.

Sebbene le due tangenti A G, A' G' dello spigolo di regresso G G' siano pur tangenti alla superficie **E** de' centri geodetici, non si può asserir lo stesso del piano che le contiene, cioè del piano tangente in A alla superficie data: inquantochè la retta G G' che unisce i loro punti di contatto si confonde al limite con una delle stesse rette, cioè colla A' G'. Invece, se noi abbiamo riguardo al piano osculatore della linea di curvatura A B dell'altro sistema, apparisce chiaro che è desso il piano tangente in G alla superficie **E**. Questo piano contiene infatti due tangenti consecutive della linea A B, cioè la A G e la B G_1, le quali toccano in G e G_1 respettivamente la superficie **E**.

Ora quando **E** non si riduce a un punto o a una linea e non siano in punti singolari di essa, i punti G e G_1 son tali che uniti fra di loro, la retta G G_1 è certamente distinta dalle A G e B G_1; per conseguenza il piano osculatore considerato, contenendo le tre tangenti AG, BG_1, e GG_1 alla superficie **E**, ne è al limite il piano tangente in G, come dovevasi dimostrare.

Si ha intanto questo risultato che: « la superficie dei « centri geodetici relativi ad un sistema di linee di curva- « tura d'una superficie qualunque è inviluppata da' piani « osculatori dell'altro sistema di linee di curvatura ».

Da ciò risulta subito che la linea G G' . . ; la quale ha per piani osculatori i piani tangenti alla superficie lungo i punti di AA'.., non può esser in generale geodetica della superficie de' centri geodetici; e soltanto lo diventa quando i piani osculatori del secondo sistema di linee di curvatura sono normali alla superficie, ossia quando questo secondo sistema di linee è formato da geodetiche della superficie stessa.

Ora è noto che in tal caso la superficie data si può considerar come generata da una linea qualsivoglia che sia descritta sopra il piano tangente d'una superficie sviluppabile, mentre questo piano ruota, però senza strisciare, attorno alle generatrici successive della medesima superficie: dimodochè il sistema di linee geodetiche è dato appunto dalle posizioni successive della linea mobile, e l'altro sistema dalle linee che ciascuno dei suoi punti, durante il movimento viene a descrivere. Ciò ammesso è facile vedere che le linee di curvatura di quest'ultimo sistema hanno per superficie polare comune la sviluppabile direttrice, la quale è al tempo stesso la superficie evoluta e quella de' centri geodetici.

Dunque: « nel caso particolare soltanto che un sistema « di linee di curvatura sia formato di geodetiche, le linee « che sulla superficie de' centri geodetici sono le evolute « dell'altro sistema di linee di curvatura, sono geodetiche « di quest'ultima superficie, la quale viene in tal caso ad « essere una superficie sviluppabile ».

Si può notare inoltre che le due geodetiche formate dai centri C e G, hanno, ne' punti corrispondenti, direzioni complementarie, e che esse non possono essere trajettorie delle generatrici della superficie su cui sono tracciate, se non nel caso che le linee di curvatura del sistema non geodetico, taglino la superficie sotto un angolo costante, cioè, siano anch'esse linee piane, come vedremo in seguito.

14. Un caso particolare delle superficie sopra considerate, ce l'offrono le superficie *canali*.

Queste in generale si definiscono come l'inviluppo d'una sfera di raggio costante, il cui centro si muove sopra una linea data a piacere, oppure si considerano come generate da un cerchio di raggio costante, il cui centro si muove lungo una linea data, mentre il suo piano si conserva sempre ad essa perpendicolare. In tal caso, è evidente che il

sistema di linee di curvatura geodetiche è costituito dalle posizioni successive del cerchio mobile, le cui tangenti inviluppano appunto la superficie polare della linea direttrice: tal superficie è dunque la superficie dei centri geodetici. Si può quindi concludere che nelle superficie canali, mentre un sistema di linee di curvatura è geodetico, l'altro sistema ha i suoi centri geodetici tutti situati sopra una superficie sviluppabile la quale si riduce ad un cono, quando la linea direttrice è piana, e ad una retta quando la medesima direttrice è circolare. Il toro è compreso in quest'ultimo caso.

III.

151. Passiamo ora a studiare altre proprietà delle linee di curvatura, e a dimostrarne i principali teoremi, servendoci esclusivamente delle relazioni che esistono fra le medesime linee e le loro rappresentazioni sferiche fatte col metodo di Gauss; vale a dire, conducendo pel centro d'una sfera di raggio uno le parallele alle normali (esterne o interne alla superficie della quale si cercano le linee di curvatura, e considerando come corrispondenti i punti della superficie e della sfera che hanno le normali parallele.

Sia AB una linea di curvatura qualsivoglia della superficie data, ab la corrispondente sferica; di maniera che ad A corrisponda a, a B b. Poichè i raggi ca, cb delle sfere sono respettivamente paralleli alle normali CA, CB della superficie, il piano cab è parallelo al piano CAB, e la tangente in a alla ab è parallela alla tangente in A alla AB; si può dire intanto che, nelle rappresentazioni di Gauss, le tangenti delle linee che sulle sfere corrispondono alle linee di curvatura della superficie sono, ne' punti corrispondenti, respettivamente parallele a quelle delle linee di curvatura stessa. Dunque: « come nelle superficie le

« linee di curvatura formano un doppio sistema di linee « ortogonali, così nella sfera, le loro rappresentazioni « formano pure un doppio sistema di linee ortogonali ».

Come conseguenza di questa notissima proprietà si ha ancora che i piani normali della linea di curvatura AB sono paralleli a quelli della linea sferica *ab*, e lo stesso avviene delle loro respettive intersezioni, cioè, delle rette polari; ragione per cui gli angoli ACG, *acg* vengono ad essere eguali fra di loro. Ma l'angolo ACG, lo abbiamo già dimostrato uguale all'inclinazione che il piano osculatore della linea ha sul piano tangente alla superficie; e l'angolo *acg* è misurato dall'arco *ag* normale ad *ab*, in *a*, cioè, nel punto corrispondente di A. Ne segue dunque che: « gli archi di circolo massimo normali alla linea sferica, che è la rappresentazione « d'una linea di curvatura, compresi fra la stessa linea e « la sua evoluta sferica, misurano gli angoli che i piani « osculatori ne' punti corrispondenti delle linee di curvatu« ra fanno co' respettivi piani tangenti alla superficie ».

16. Questo risultato potrebbe essere utile per studiare il modo col quale varia l'angolo che il piano osculatore in ciascuno de' punti d'una linea di curvatura fa col respettivo piano tangente alla superficie. È chiaro infatti che il differenziale di quest'angolo è eguale all'arco elementare della evoluta sferica della linea che è la rappresentazione sulla sfera della linea di curvatura considerata; e che, un arco qualunque della medesima evoluta, per una proprietà già nota, misura la differenza degli angoli che i piani osculatori alla linea di curvatura, ne' punti corrispondenti agli estremi di quest'arco fanno co' respettivi piani tangenti alla superficie. Talchè quando si avessero a considerare superficie tali che, in esse, un sistema di linee di curvatura rappresentato sulla sfera dasse luogo a linee aventi una medesima sviluppata sferica (ciò che vuol dire che i piani osculatori delle linee del medesimo sistema lungo le linee

dell'altro sistema sono paralleli fra loro) si vedrebbe subito, per mezzo delle osservazioni precedenti, che i piani tangenti alla superficie, lungo una stessa linea di curvatura, fanno un medesimo angolo co' piani corrispondenti (cioè, che i loro punti di contatto sono sopra una stessa linea di curvatura dell'altro sistema) che sono tangenti alla superficie ne' punti d'una linea di curvatura qualunque del medesimo sistema, e quindi che l'inclinazione de' piani osculatori alla stessa linea di curvatura sulla superficie varia d'una quantità costante nel passare da una qualunque di esse ad un'altra. Di tali proprietà godono appunto le superficie studiate da *Picart*, quelle, cioè, che hanno un sistema di linee di curvature sferiche e situate su sfere concentriche. Difatti, in tal caso, i piani normali di tutte le linee sferiche passano ciascuno per il centro comune delle sfere, e quindi le superficie sviluppabili delle normali, lungo le linee dell'altro sistema si riducono o a piani o a coni col vertice in quel medesimo centro. Ora questa seconda ipotesi non è ammissibile, perchè la superficie data dovrebbe allora ridursi ad una sfera, caso che noi escludiamo. Si vede adunque che le linee dell'altro sistema non solo sono piane ma ancora geodetiche, e i loro piani inviluppano una superficie conica col vertice nel centro comune della sfera, su cui sono tracciate le linee dell'altro sistema. Tali superficie possono allora ritenersi come generate da una linea tracciata sopra il piano tangente ad una superficie conica, mentre questo piano si muove, però senza strisciare, attorno alla generatrice successiva della stessa superficie; per cui si vede chiaro che il sistema di linee di curvatura sferiche rappresentate sopra una sfera di raggio uno ha una medesima sviluppata sferica e perciò le superficie di *Picart* godono appunto delle proprietà di cui dicevo sopra.

17. Dopo ciò che abbiamo concluso al n.° 15, il teore-

ma di *Joachimstal* sulle linee di curvatura piana è reso evidente. Quando infatti una linea di curvatura è piana la linea sferica che la rappresenta, dovendo avere le sue tangenti parallele alle tangenti di quella sarà pur piana, e dovrà quindi ridursi ad un cerchio. Ora la sviluppata sferica d' un cerchio essendo un punto, gli archi che misurano gli angoli che il piano della linea di curvatura, ne' suoi diversi punti, fa colla superficie son tutti eguali fra loro; lo che ci fa concludere che il piano stesso taglia la superficie sotto un angolo costante.

La reciproca di questo teorema è pur vera, e la si dimostrerebbe subito facendo delle considerazioni analoghe alle precedenti.

18. Dimostriamo invece un altro teorema pur noto ma più generale di quello di *Joachimstal*; esso può enunciarsi così: « Se due superficie qualsivogliano si tagliano secondo « una linea che è di curvatura per ambedue, esse si taglia- « no secondo un angolo costante, e viceversa se esse si « tagliano sotto angolo costante la linea d'intersezione è « linea di curvatura dell'una, essa lo è anche dell'altra ».

Infatti, sia A B la linea di curvatura comune a due superficie S e S'; A C, B C due normali alla superficie S, ed A C', B C' due normali ad S'. Conduciamo le parallele $c\,a$, $c\,b$ alle normali di S, e le $c\,a'$, $c\,b'$ alle normali di S'; si vede subito che le due linee sferiche $a\,b$, $a'b'$, dovendo avere la medesima sviluppata, sono in tutti i loro punti egualmente distanti fra di loro, per cui gli archi $a\,a'$, $b\,b'$ sono eguali, e così pure gli angoli CAC', CBC'..; dunque le due superficie si tagliano secondo un angolo costante.

Reciprocamente, supponiamo che le due superficie si taglino sotto un angolo costante, e che la linea A B sia linea di curvatura di S; si vuol dimostrare ch'essa lo è anco di S'. Invero, sia $a\,b$ la rappresentazione sferica di

AB, sarà la tangente in a alla $a\,b$ parallela alla tangente in A alla AB. Si conducano le parallela $c\,a'$, $c\,b'$ alle AC', BC' normali di S'; esse, per l'ipotesi fatta, determineranno sugli archi di circolo massimo aa', bb' normali ad ab delle lunghezze costanti; e perciò sarà la tangente in a' alla curva $a'\,b'$ parallela alla tangente in a, ed anche alla tangente in A alla curva data. Ne segue che il piano tangente, secondo la generatrice ca', alla superficie conica che ha le sue generatrici parallele alle normali dalla superficie S' lungo la linea AB, contiene al limite tre rette parallele respettivamente alla tangente in A di AB, e alle due normali C'A, C'B; ciò vuol dire che queste due normali sono in uno stesso piano, e perciò s'incontrano. Dunque, le normali della superficie S' lungo la AB, incontrandosi due a due, questa linea è di curvatura anche per S', come dovevasi dimostrare.

Da questo teorema si deducono subito, come casi particolari, quello di *Joachimstal* pel piano, ed un altro analogo per la sfera. Difatti, ogni linea situata sopra un piano, o sopra una sfera, potendosi ritenere come linea di curvatura di questa superficie, tutte le volte che una linea tracciata sopra una superficie, sarà piana o sferica, il piano o la sfera corrispondente taglieranno la superficie secondo un angolo costante; e viceversa, quando un piano od una sfera taglieranno una superficie data sotto un angolo costante, la linea d'intersezione sarà linea di curvatura della superficie medesima.

19. Nelle superficie sviluppabili è facile vedere che le linee di curvatura sono le generatrici, e le loro trajettorie ortogonali. Se facciamo la rappresentazione sferica d'una di queste superficie, evidentemente non otteniamo che una sola linea sulla sfera, cioè la linea delle intersezioni delle perpendicolari al sistema di piani inviluppanti la superficie data; la qual linea gode della proprietà d'aver le sue tan-

genti parallele a quelle delle trajettorie ortogonali delle generatrici della sviluppabile. Vediamo subito di quì che non si può considerare una superficie sviluppabile con una linea di curvatura piana, senza che abbia anche tutte le altre linee di curvatura piane e situate in piani paralleli, e di più senza che si riduca ad un elicoide sviluppabile, il quale ha per spigolo di regresso un'elica tracciata sopra un cilindro colle generatrici perpendicolari a' piani delle linee di curvatura.

Viceversa, un elicoide sviluppabile ha le linee di curvatura piane e situate in piani paralleli. Difatti, le medesime linee non sono altro che le evolventi dell' elica spigolo di regresso, e come tali, avendo per superficie polare comune il cilindro su cui è tracciata l'elica, sono di necessità piane e situate su piani perpendicolari alle generatrici del cilindro. Si può perciò dire che: « gli elicoidi sono le « sole superficie sviluppabili che abbiano le linee di curva- « tura piane ».

Si vede anche che le linee di curvatura d' un elicoide sviluppabile sono le evolventi delle sezioni rette del cilindro, su cui è tracciata l' elica spigolo di regresso; e quindi che nel caso d'un elicoide il cui spigolo di regresso sia un' elica appartenente ad un cilindro di rivoluzione le linee di curvatura sono tante evolventi di cerchio, e nel caso d' un elicoide che ha per spigolo di regresso un' elica cilindro-conica son tante spirali logaritmiche, come già ebbi luogo di far notare anche nella mia tesi sulle linee a doppia curvatura.

20. Prendiamo ora a considerare una superficie che abbia tutte le linee di curvatura piane, e cerchiamo quali relazioni di posizione esistano fra i piani di quelle linee. Per le cose dette precedentemente, la rappresentazione sulla sfera si farà in tal caso per mezzo di due sistemi di cerchi ortogonali fra di loro, i piani de' quali saranno pa-

ralleli (ciascuno al proprio corrispondente) a quelli delle linee di curvatura della superficie. Se ora consideriamo uno qualunque de' cerchi del primo sistema, si vede subito che il cono retto circoscritto alla sfera secondo il medesimo ha il suo vertice situato sopra ciascuno de' piani de' cerchi del secondo sistema; ciò che vuol dire che tutti questi piani passano pel medesimo vertice. Quello che avviene per uno de' coni, lo si può ripetere per tutti gli altri, resulta adunque da ciò che il secondo sistema de' piani de' cerchi, dovendo avere un' infinità di punti a comune (i vertici de' coni retti circoscritti ai cerchi dell' altro sistema) passano tutti per una stessa retta xy.

Il ragionamento è evidentemente applicabile all' altro sistema di cerchi; dunque anche i piani di questi passano tutti per una stessa retta $x'y'$. Dico ora che le due rette xy, $x'y'$ sono perpendicolari fra di loro. Consideriamo infatti una qualunque delle due rette, per es. la xy; essa è il luogo geometrico de' vertici de' coni retti circoscritti ad un sistema di cerchi della sfera; talmente che ad ogni punto della medesima corrisponde sempre un circolo della sfera, il piano del quale passa per l'altra retta $x'y'$.

Quindi anche il punto all'infinito della retta deve avere il suo cerchio corrispondente, che sarà il cerchio di contatto fra la sfera ed il cono retto che ha per vertice quel punto. In questo caso il cono si riduce al cilindro circoscritto alla sfera parallelamente alla retta xy; ed il piano del cerchio di contatto (che è un cerchio massimo) è per conseguenza perpendicolare a questa stessa retta. Ma d' altra parte quel piano, come tutti gli altri del medesimo sistema, deve contenere la retta $x'y'$; si vede dunque che le due rette xy, $x'y'$ sono perpendicolari fra di loro.

Tornando ora alla superficie primitiva, possiamo dunque enunciare il seguente teorema, dovuto a *Bonnet:*

« Se tutte le linee di curvatura d'una superficie sono

« piane, i piani di ciascun sistema sono paralleli ad una « stessa retta ($x\,y$, o $x'\,y'$), e queste due rette sono per« pendicolari fra di loro ».

21. Nel caso particolare che le linee di curvatura d' un sistema siano piane, e situate in piani paralleli fra loro, la rappresentazione sulla sfera delle medesime facendosi allora per mezzo d'un sistema di paralleli, quella del secondo sistema dovrà farsi secondo un sistema di meridiani. Per la qual cosa, è evidente che anche le linee del secondo sistema sono piane non solo, ma altresì geodetiche; e i loro piani inviluppano un cilindro colle generatrici perpendicolari a' piani delle linee del primo sistema, di maniera che queste stesse linee vengono ad essere delle evolventi delle sezioni rette del cilindro.

Ora se ben si considerano le superficie *moulures*, si vede ch' esse non differiscono affatto dalle superficie sopra considerate. Si può dunque non fare distinzione di sorta fra queste superficie; ed invece di parlar di superficie che hanno le linee di curvatura d' un sistema in piani paralleli, si può addirittura parlare di superficie *moulures* considerando queste come generate anche in quest' altro modo, cioè: da una curva qualsivoglia fissa di posizione sopra il piano tangente d' un cilindro direttore, che viene da questo piano trasportata, mentre esso ruota, però senza strisciare, attorno alle successive generatrici del cilindro.

Rammentando ora ciò che fu detto al n.° 13, si può concludere che le superficie *moulures* sono le sole superficie fra quelle che godono della proprietà che le evolute formate da' centri geodetici delle linee di curvatura, siano al tempo stesso geodetiche e trajettorie delle generatrici della superficie de' centri geodetici. Esse sono infatti eliche appartenenti al cilindro direttore.

IV.

22. Siano x, y, z le coordinate dei punti d'una superficie qualunque riferiti ad un sistema di assi ortogonali; e X, Y, Z le coordinate de' punti corrispondenti della sfera, su cui si fa la rappresentazione della superficie col metodo di *Gauss*; siano poi

$$(8) \quad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \\ ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2 \end{cases}$$

i quadrati degli elementi lineari della superficie e della sfera, quando si prendono per coordinate le linee di curvatura e le loro corrispondenti sferiche: sarà

$$(9) \quad \left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2, \\ \text{ed} \quad E' &= \left(\frac{dX}{du}\right)^2 + \left(\frac{dY}{du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{du}\right)^2, \\ G' &= \left(\frac{dX}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dv}\right)^2, \end{aligned}\right\}$$

e poichè abbiamo già dimostrato (n.° 15) che le tangenti alle linee di curvatura sono parallele alle tangenti delle linee corrispondenti sulla sfera, avremo:

$$\frac{dx}{ds_v} = \frac{dX}{ds'_v}, \quad \frac{dy}{ds_v} = \frac{dY}{ds'_v}, \quad \frac{dz}{ds_v} = \frac{dZ}{ds'_v},$$

$$\frac{dx}{ds_u} = \frac{dX}{ds'_u}, \quad \frac{dy}{ds_u} = \frac{dY}{ds'_u}, \quad \frac{dz}{ds_u} = \frac{dZ}{ds'_u}.$$

ossia

$$(10)\begin{cases} \dfrac{dx}{\sqrt{E}du}=\dfrac{dX}{\sqrt{E'}du}\,, & \dfrac{dy}{\sqrt{E}du}=\dfrac{dY}{\sqrt{E'}du}\,, & \dfrac{dz}{\sqrt{E}du}=\dfrac{dZ}{\sqrt{E'}du}\,, \\ \dfrac{dx}{\sqrt{G}dv}=\dfrac{dX}{\sqrt{G'}dv}\,, & \dfrac{dy}{\sqrt{G}dv}=\dfrac{dY}{\sqrt{G'}dv}\,, & \dfrac{dz}{\sqrt{G}dv}=\dfrac{dZ}{\sqrt{G'}dv}\,. \end{cases}$$

Ora, se indichiamo con r_1 e r_2 i raggi di curvatura principali relativi alle linee u e v respettivamente, ed osservando che ds'_v, ds'_u misurano gli angoli di contingenza delle sezioni principali nel punto di coordinate $(u\,,\,v)$ avremo pure

$$\frac{ds_v}{ds'_v}=r_2\,, \quad \frac{ds_u}{ds'_u}=r_1$$

da cui si ricava

$$(11) \qquad \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E'}}=r_2\,, \quad \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G'}}=r_1\,,$$

per mezzo delle quali le (10) si trasformano nelle altre

$$(12)\begin{cases} \dfrac{dx}{du}=r_2\dfrac{dX}{du}\,, & \dfrac{dy}{du}=r_2\dfrac{dY}{du}\,, & \dfrac{dz}{du}=r_2\dfrac{dZ}{du}\,, \\ \dfrac{dx}{dv}=r_1\dfrac{dX}{dv}\,, & \dfrac{dy}{dv}=r_1\dfrac{dY}{dv}\,, & \dfrac{dz}{dv}=r_1\dfrac{dZ}{dv}\,, \end{cases}$$

che sono le formule di *Rodriguez* che qui abbiamo trovate col metodo dato dal Prof. *Dini* nella sua memoria.

23. Analoghe alle (11) si possono ora ottenere altre due formule, che m' interessa di far conoscere non solo per la loro semplicità, ma ancora perchè dalle medesime si ricavano subito due formule del Prof. *Dini*, che sono d'una grandissima importanza nella teoria delle superficie.

Sia A B una linea di curvatura qualunque del sistema v, ed A G$=r_{gv}$, A C$=r_2$ ne siano il raggio di curvatura geodetica, ed il raggio di curvatura principali corrispondenti. Poichè l' angolo A C G, come abbiamo già avuto luogo di far osservare, è eguale all'angolo α che il piano osculatore in A della linea di curvatura fa col piano tangente alla superficie, sarà

$$(13) \qquad r_{gv} = r_2 \operatorname{tang} \alpha .$$

Ma se $a\,b$ è la linea sferica corrispondente ad A B, e g è l'intersezione de' due archi di circolo massimo normali ad $a\,b$ ne' punti infinitamente vicini a e b, si ha (n.° 15)

$$a\,g = \alpha$$

e quindi anche tang $a\,g$=tang α.

Ora l'espressione $\frac{1}{\operatorname{tang} a\,g}$ (V. *Bertrand,* Calc. Differ. pag. 576) è la curvatura geodetica della linea sferica $a\,b$ nel punto a, dunque tang α=tang $a\,g$ ne sarà il raggio di curvatura geodetica corrispondente; per cui, indicandolo con r'_{gv}, sarà

$$r'_{gv} = \operatorname{tang} \alpha ,$$

e perciò la (13) si trasformerà nell'altra:

$$(14) \qquad \frac{r_{gv}}{r'_{gv}} = r_2 .$$

Similmente si troverebbe

$$(15) \qquad \frac{r_{gu}}{r'_{gu}} = r_1 .$$

Queste due sono appunto le formule di cui parlavo.

Per vedere ora come da esse si ricavano quelle del Prof. *Dini*, basta sostituire in luogo dei raggi di curvatura geodetica delle linee u e v sulla superficie e sulla sfera, le loro espressioni in funzione dei coeficienti degli elementi lineari corrispondenti. Difatti, avendosi

$$\frac{1}{r_{gu}}=\frac{d\log\sqrt{E}}{\sqrt{G}dv}\,,\quad \frac{1}{r_{gu}}=-\frac{d\log\sqrt{G}}{\sqrt{E}\,du}\,,$$
$$\frac{1}{r'_{gv}}=\frac{d\log\sqrt{E'}}{\sqrt{G'}dv}\,,\quad \frac{1}{r'_{gu}}=-\frac{d\log\sqrt{G'}}{\sqrt{E'}\,du}\,,$$

sostituendo questi valori nella (14), si troverà:

$$\frac{d\log\sqrt{E'}}{\sqrt{G'}\,dv}=r_2\,\frac{d\log\sqrt{E}}{\sqrt{G}\,dv}\,,$$

ed usando della seconda delle (11) si avrà:

$$(16)\qquad r_1\,\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}=r_2\,\frac{d\log\sqrt{E}}{dv}\,.$$

Ma dalla prima delle (11) abbiamo:

$$\sqrt{E}=r_2\sqrt{E'}\,,$$

dalla quale si ha

$$\log\sqrt{E}=\log r_2+\log\sqrt{E'}$$

e derivando rispetto a v si ottiene:

$$\frac{d\log\sqrt{E}}{dv}=\frac{1}{r_2}\,\frac{dr_2}{dv}+\frac{d\log\sqrt{E'}}{dv}$$

e quindi la (16) diviene:

$$r_1 \frac{d \log \sqrt{E'}}{d v} = \frac{d r_2}{d v} + r_2 \frac{d \log \sqrt{E'}}{d v}$$

oppure

$$(17) \quad (r_1 - r_2) \frac{d \log \sqrt{E'}}{dv} - \frac{d r_2}{dv} = 0.$$

Nel medesimo modo si troverebbe

$$(17) \quad (r_1 - r_2) \frac{d \log \sqrt{G'}}{du} + \frac{dr_1}{du} = 0$$

Se invece di eliminare il coeficiente E, dalla (16), si fosse eliminato E', e dalla analoga invece di eliminare G si fosse eliminata G', avremmo trovato le due formule seguenti:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{d \log \sqrt{E}}{dv} - \frac{d \frac{1}{r_2}}{dv} = 0 \\ &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{d \log \sqrt{G}}{du} + \frac{d \frac{1}{r_1}}{du} = 0 \end{aligned} \right.$$

le quali, fa d'uopo notare che valgono per tutte le superficie, tranne le sviluppabili.

24. Il Prof. *Dini* dalle formule (17) e le (18) da lui trovate ha dedotti molti teoremi ed anche le equazioni in termini finiti delle superficie le cui linee di curvatura sono piane.

La risoluzione di questo problema è per altro dovuta al signor *Bonnet*, il quale dette pel primo tre equazioni nelle coordinate x , y , z de' punti di tali superficie, fra le quali restano però ad eliminarsi, per ogni determinazione particolare delle due funzioni arbitrarie in esse contenute, le due derivate parziali del primo ordine di z. Invece il Pr. *Dini* ha trovato le coordinate de' vari punti delle superficie a linee di curvatura piana in funzione de' parametri delle linee di curvatura e con due funzioni arbitrarie, l'una d'una variabile, l'altra dell'altra; di modo che i calcoli da farsi per ogni determinazione speciale delle funzioni arbitrarie sono soltanto quadrature.

25. Se supponiamo ora che sia $\sqrt{G} = \varphi(v)$, e quindi le u siano geodetiche, e di più che sia $r_1 = \psi(r_2)$, si vede subito che anche $\sqrt{E}$ deve essere una funzione di v solamente; e perciò si può dire che: « Fra le superficie che « hanno un sistema di linee di curvatura geodetiche, quelle « nelle quali un raggio di curvatura è una funzione « determinata dell'altro sono soltanto le superficie di « rivoluzione.

26. Per mezzo delle (18) si può dimostrare anche quest'altro teorema: « le superficie sviluppabili sono le sole « superficie in cui uno de' raggi di curvatura sia infinito. »

Difatti, supponiamo che sia data una superficie con un raggio di curvatura infinito, e sia p. es. $r_1 = \infty$: allora, escludendo il caso di $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$, dalla seconda delle (18) si ha che G è funzione di v solamente; e questo porta che, nell'ipotesi fatta, le u = cost. sono geodetiche della superficie data. Ora una linea di curvatura non può esser geodetica se non è piana; quindi le u=cost. sono piane, ed il loro raggio di curvatura ordinaria coincide col raggio di curvatura principale corrispondente. Se questo è sempre infinito, le linee u non possono essere

che rettilinee; e perciò le sviluppabili circoscritte alla superficie lungo le medesime si riducono a dei piani. Dunque l'ipotesi che una superficie abbia un raggio di curvatura infinito, porta a concludere ch' essa non può essere che l'inviluppo di piani, che colle loro successive intersezioni danno uno dei sistemi di linee di curvatura della superficie stessa, o più brevemente, che questa superficie non può essere altro che una sviluppabile. Le sviluppabili però essendo state escluse necessariamente dalle nostre considerazioni nella rappresentazione sferica, il teorema non può dirsi ancora dimostrato; però siccome è noto, e lo si vede anche molto facilmente, che tutte le superficie sviluppabili hanno un raggio di curvatura infinito, ne segue che tal proprietà è caratteristica delle superficie sviluppabili, e che il teorema sopra enunciato è vero.

27. Passiamo ora a dare l'elemento lineare della superficie dei centri geodetici per aver luogo dapprima di confermare seguendo una via diversa, alcuni de' resultati già trovati, e poi per vedere se possono esistere classi di tali superficie applicabili l'una sull'altra, e su una superficie tipo, fra quelle che già si conoscono.

Indichiamo sempre con x, y, z le coordinate dei punti della superficie data, con ξ, η, ζ quelle de' punti della superficie de' centri geodetici; evidentemente abbiamo:

$$\xi = x - r_{gv} \frac{dx}{\sqrt{G}dv}, \quad \eta = y - r_{gv} \frac{dy}{\sqrt{G}dv}, \quad \zeta = z - r_{gv} \frac{dz}{\sqrt{G}dv},$$

e ponendo per brevità di scrittura

$$\frac{\sqrt{G}}{r_g} = \frac{d \log \sqrt{E}}{dv} = \frac{1}{a},$$

sarà

$$\xi = x - a\frac{dx}{dv}\ ,\ \eta = y - a\frac{dy}{dv}\ ,\ \zeta = z - a\frac{dz}{dv}\ .$$

Differenziando e poi quadrando e sommando, si ottiene per l' elemento lineare $d\sigma$ della superficie de' centri geodetici, la seguente espressione:

$$(19)\quad d\sigma^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2 + a^2\left[\left(d.\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{dv}\right)\right]^2 +$$
$$+\mathrm{G}\,da^2 - 2a\left[dx\,d.\frac{dx}{dv} + \ldots\right] - 2da\left[da\frac{dx}{dv} + \ldots\right] + 2\,a\,d\,a\,d\bar{\mathrm{G}}$$

che ora semplicizzeremo.

Si ha intanto

$$d.\frac{dx}{dv} = \frac{d^2x}{du\,dv}du + \frac{d^2x}{dv^2}dv$$
$$d.\frac{dy}{dv} = \frac{d^2y}{du\,dv}du + \frac{d^2y}{dv^2}dv$$
$$d.\frac{dz}{dv} = \frac{d^2z}{du\,dv}du + \frac{d^2z}{dv^2}dv$$

quadrando e sommando, viene

$$(20)\quad \left(d.\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{dv}\right)^2 = du^2\left[\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\right)^2 + \ldots\right] +$$
$$dv^2\left[\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)^2 + \ldots\right] + 2\,du\,dv\left[\frac{d^2x}{du\,dv}\frac{d^2x}{dv^2} + \ldots\right].$$

Ma dalle (12) scritte sotto questa forma

$$\frac{1}{r_2}\frac{dx}{du} = \frac{d\mathrm{X}}{du}\ ,\ \frac{1}{r_2}\frac{dy}{du} = \frac{d\mathrm{Y}}{du}\ ,\ \frac{1}{r_2}\frac{dz}{du} = \frac{d\mathrm{Z}}{du}$$
$$\frac{1}{r_1}\frac{dx}{dv} = \frac{d\mathrm{X}}{dv}\ ,\ \frac{1}{r_1}\frac{dy}{dv} = \frac{d\mathrm{Y}}{dv}\ ,\ \frac{1}{r_1}\frac{dz}{dv} = \frac{d\mathrm{Z}}{dv}$$

si ricava

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2x}{du\,dv}+\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dx}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dx}{du}=0\\
&\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2y}{du\,dv}+\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\frac{dy}{du}=0\\
&\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2z}{du\,dv}+\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\frac{dz}{du}=0
\end{aligned}
\right.
$$

e perciò:

$$
\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{du dv}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{du dv}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2}\left\{\mathrm{E}\left(\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right)^2+\mathrm{G}\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\right)^2\right\}
$$

Si ha poi identicamente

$$
\frac{dx}{ds_u}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{dx}{dv},\quad \frac{dy}{ds_u}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{dy}{dv}\quad \frac{dz}{ds_u}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{dz}{dv}
$$

e derivando

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{ds^2_u}=\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2x}{dv^2}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{dv}\frac{dx}{dv},\\
&\frac{d^2y}{ds_u^2}=\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2y}{dv^2}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{dv}\frac{dy}{dv},\\
&\frac{d^2z}{ds_u^2}=\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2z}{dv^2}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{dv}\frac{dz}{dv},
\end{aligned}
\right.
$$

per cui quadrando e sommando, verrà:

$$\left(\frac{d x^2}{ds_u^2}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{\rho_u^2} = -\left(\frac{d\frac{1}{\sqrt{G}}}{dv}\right)^2 + \frac{1}{G^2}\left[\left(\frac{d^2 x}{d v^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

e quindi

$$(23) \quad \left(\frac{d^2 x}{d v^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d v^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d v^2}\right)^2 = \frac{G^2}{\rho_u^2} + \left(\frac{d\sqrt{G}}{dv}\right)^2$$

dove $\frac{1}{\rho_u}$ è la curvatura della linea u=cost nel punto di coordinate (u, v).

Dalle (21) si ricava

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2 x}{du\,dv} = \frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dx}{du} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dx}{dv},$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2 y}{du\,dv} = \frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dy}{du} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dy}{dv},$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2 z}{du\,dv} = \frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dz}{du} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dz}{dv};$$

le quali moltiplicate respettivamente per

$$\frac{d^2 x}{d v^2}, \quad \frac{d^2 y}{d v^2}, \quad \frac{d^2 z}{d v^2},$$

ed avendo riguardo alla seguente:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = 0,$$

e all' altra:

$$\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{dv^2}+\ldots=-\left(\frac{d^2x}{dudv}\frac{dv}{dx}+\text{s}.\right)=-\frac{1}{2}\frac{dG}{du},$$

danno:

$$(24)\quad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\frac{d^2x}{d\,v^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\frac{dG}{dv}\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}-\frac{1}{2}\frac{dG}{du}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}.$$

Sostituendo quindi nella (20) i valori (22), (23), (24), trovasi

$$(25)\quad \left(d.\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{dv}\right)^2=$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2}\left\{E\left(\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right)^2+G\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\right)^2\right\}du^2+$$

$$-\left\{\frac{G^2}{\rho^2_u}+\left(\frac{d\sqrt{G}}{dv}\right)\right\}\frac{1}{dv^2\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}-\left\{\frac{1}{2}\frac{dG}{dv}\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}+\frac{dG}{dv}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right\}du\,dv$$

E così è calcolato uno de' termini della (19).

Per calcolare anche gli altri, osserviamo che avendosi

$$dx=\frac{dx}{du}du+\frac{dx}{dv}dv\ ,\quad d.\frac{dx}{dv}=\frac{d^2x}{du\,dv}du+\frac{d^2x}{d\,v^2}dv$$

$$dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv\ ,\quad d.\frac{dy}{dv}=\frac{d^2y}{du\,dv}du+\frac{d^2y}{d\,v^2}dv$$

$$dz=\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dv}dv\ ,\quad d.\frac{dz}{dv}dv=\frac{d^2z}{du\,dv}du+\frac{d^2z}{dv^2}dv$$

sarà

$$(26)\quad dx\, d.\frac{dx}{dv} + dy\, d.\frac{dy}{dv} + dz\, d.\frac{dz}{dv} = du^2\left[\frac{d^2x}{du dv}\frac{dx}{du} + \ldots\right] +$$

$$+ dv^2\left[\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{dv^2} + \ldots\right] = \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}du^2 + \frac{1}{2}\frac{dG}{dv}dv^2$$

Similmente si trova

$$(27)\qquad dx\frac{dx}{dv} + dy\frac{dy}{dv} + dz\frac{dz}{dv} = G\, dv\,.$$

Inoltre, essendo

$$da = \frac{da}{du}du + \frac{da}{dv}dv \quad , \quad dG = \frac{dG}{du}du + \frac{dG}{dv}dv$$

abbiamo

$$(28)\qquad da^2 = \left(\frac{da}{du}\right)^2 du^2 + \left(\frac{da}{dv}\right)^2 dv^2 + 2\frac{da}{du}\frac{da}{dv}du dv,$$

e

$$(29)\quad da\, dG = \frac{da}{du}\frac{dG}{du}du^2 + \frac{da}{dv}\frac{dG}{dv}dv^2 + du dv\left[\frac{da}{dv}\frac{dG}{du} + \frac{da}{du}\frac{dG}{dv}\right].$$

Sostituiamo ora nella (19), i valori trovati (25), (26), (27) (28), (29) avremo:

$$d\sigma^2 = \left[E + \frac{r_g^2}{G} + \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2}\left\{E\left(\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right)^2 + G\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\right)^2\right\} + \right.$$

$$+G\left(\frac{d\frac{r_g}{\sqrt{G}}}{du}\right)^2-\frac{r_g}{\sqrt{G}}\frac{dE}{dv}+\frac{r_g}{\sqrt{G}}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{du}\frac{dG}{du}\Bigg]du^2+$$

$$+\Bigg[G+\frac{Gr_g^2}{\rho_u^2}+\frac{r_g^2}{G}\left(\frac{d\sqrt{G}}{dv}\right)^2+G\left(\frac{d\frac{r_g}{\sqrt{G}}}{dv}\right)^2-\frac{r_g}{\sqrt{G}}\frac{dG}{dv}-$$

$$2G\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{dv}+\frac{r_g}{\sqrt{G}}\frac{dG}{dv}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{dv}\Bigg]dv^2+$$

$$+2\Bigg[-\frac{r_g^2}{G\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\left\{\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dG}{dv}+\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dG}{du}\right\}+$$

$$+G\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{du}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{dv}-G\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{du}+$$

$$+\frac{r_g}{2\sqrt{G}}\left\{\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{du}\frac{dG}{du}+\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{G}}\right)}{du}\frac{dG}{dv}\right\}\Bigg]du\,dv\,,$$

la quale, per mezzo della (18) si riduce alla seguente:

$$(30)\quad d\sigma^2=\left(\frac{dr_g}{du}\right)^2du^2+2\frac{dr_g}{du}\left(\frac{dr_g}{dv}-\sqrt{G}\right)du\,dv+$$
$$+\left\{G\frac{r_g^2}{\rho_u^2}+\left(\frac{dr_g}{dv}-\sqrt{G}\right)^2\right\}dv^2.$$

27. Di quì si vede subito che quando, essendo $r_{gv}=\varphi(v)$, la curvatura geodetica è costante lungo le linee v, l' elemento $d\sigma$ non è più quello di una superficie, ma bensì

quello d'una linea, sulla quale sono disposti i centri delle sfere che tagliano ad angolo retto la superficie, e che contengono le linee del sistema v, (*n.*° 20).

28. Se cercassimo con un metodo analogo al precedente l'elemento della superficie evoluta delle linee v, troveremmo:

$$(31)\quad d\sigma^2 = \left(\frac{dr_2}{du}\right)^2 du^2 + 2\frac{dr_2}{du}\frac{dr_2}{dv}du\,dv + \left\{ G\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dv}\right)^2 \right\} dv^2,$$

il quale, ha una certa analogia col precedente. Tale analogia però non è completa poichè, mentre in quest'ultimo è facile far sparire il rettangolo $du\,dv$ facendo un cambiamento di variabili e sostituendo alla u=cost., la r_2=cost., nel primo ciò non può ottenersi coll' analoga sostituzione di r_{gv} = cost. in luogo di u=cost., appunto a cagione della differenza $\frac{dr_g}{dv} - \sqrt{G}$ che è nella (30) e non nella (31).

Quindi si vede che mentre nella superficie evoluta le linee corrispendenti su essa alle r_2=cost. della primitiva sono trajettorie ortogonali delle linee evolute di quelle di curvatura corrispondenti, le linee prodotte nella superficie dei centri geodetici col fare r_{gv}=cost. non godono della proprietà analoga alla precedente, talchè per far sparire dalla (30) il rettangolo delle variabili bisogna alla u sostituire un'altra variabile α diversa dalla r_{gv}, e far quindi:

$$u = u(\alpha, v) \quad , \quad v = v.$$

Allora

$$du = \frac{du}{d\alpha}d\alpha + \frac{du}{dv}dv,$$

$$du^2 = \left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{du}{dv}\right)^2 dv^2 + 2\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{dv}d\alpha\,dv,$$

$$2\,du\,dv = 2\frac{du}{d\alpha}\,d\alpha\,dv + 2\frac{d\alpha}{dv}dv^2;$$

e perciò si ha:

$$d\sigma^2 = E_1\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + 2\left[E_1\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{dv} + F_1\frac{du}{d\alpha}\right]d\alpha\,dv +$$
$$\left[E_1\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F_1\frac{du}{dv} + G_1\right]dv^2,$$

ove E_1, F_1 e G_1 sono i coeficienti della (30). Volendo dunque che manchi il rettangolo $d\alpha dv$, basterà determinare la relazione che lega u ad α in modo che si abbia

$$\left(\frac{dr_g}{du}\right)^2\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{dv} + \frac{dr_g}{du}\frac{du}{d\alpha}\left(\frac{dr_g}{dv} - \sqrt{G}\right) = 0,$$

ossia

$$(32)\qquad \frac{dr_g}{du}\frac{du}{dv} + \frac{dr_g}{dv} = \sqrt{G} = \left(\frac{dr_g}{dv}\right),$$

dove la parentesi sta ad indicare che la derivata è presa nell'ipotesi che tutto sia stato espresso per v ed α.

Dopo ciò, l'elemento $d\sigma$ si riduce subito alla forma seguente:

$$(33)\qquad d\sigma^2 = \left(\frac{dr_g}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{dr_g}{dv}\right)^2\frac{r_{gv}^2}{\rho_u^2}dv^2,$$

che è la più semplice ch' io abbia potuto trovare; e nella quale non bisogna dimenticare che r_{gv} è il raggio di curvatura geodetico delle linee v al punto di coordinate

$(u\,,\,v)$, ed $\frac{1}{\rho_u}$ è la curvatura ordinaria delle linee $u=$ cost. nel medesimo punto.

29. Quando conformemente a uuanto fu fatto da Weingartən si trasformasse la (31) sostituendo, come dicevo sopra r_2 ad u, troveremmo invece:

$$(34) \qquad d\sigma_1^2 = dr_2^2 + \left(\frac{r_1 - r^3}{r_1}\right)^2 \mathrm{G}\, d\,v^2\,,$$

da cui vediamo subito che le v=cost. sono geodetiche della superficie de' centri di curvatura principali; e così abbiamo una conferma di ciò che asserimmo al n. 6.

Se poi supponiamo che sia r_1 una funzione determinata di r_2, si vede subito, per mezzo della (18), che anche G diviene funzione di r_2 solamente; per cui l'elemento (34) assume in tal caso la forma di quello delle superficie di rivoluzione; ciò vuol dire che: « le superficie evolute di quelle nelle « quali un raggio di curvatura è una funzione determinata « dell'altra costituiscono una classe completa di superficie « applicabili l'una sull'altra, e su una superficie di rivoluzione. » È precisamente questo il teorema di *Weingarten*, di cui il Prof. *Dini* ha dato poi una generalizzazione per la quale i problemi sulle superficie applicabili su una data superficie possono farsi dipendere da quelli sulle superficie evolute di altre superficie, e viceversa.

Tali resultati appunto, e l'analogia che esiste, almeno nel modo di generazione, fra la superficie de' centri geodetici, e la superficie de' centri di curvatura principali, mi avevano fatto sperare di poter ricavar qualche cosa di più importante dallo studio della superficie de' centri geodetici. Ora invece vedo che l' elemento (33) per essere assai più complicato del (34), non è tale, almeno

per ora, da offrirmi de' risultati d'un certo interesse. Tuttavia convien sempre sperare che o facendo un cambiamento di variabili, o sostituendo al raggio di curvatura geodetico delle linee v i coeficienti dell' elemento della superficie data, o i coeficienti dell'elemento sferico, o i raggi principali della superficie data, possa essa ridursi più semplice.

30. Valendomi ora delle formole precedenti mi limito a considerare un sol cáso particolare, tanto per aver luogo di confermare il resultato già ottenuto al n.º 12.

Supponiamo che sia G funzione di v soltanto, ciò che porta che le u=cost. sulla superficie data siano geodetiche. Allora la (32) s'integra subito, ed abbiamo,

$$r_{gv} = \varphi(v) - \alpha,$$

e quindi:

$$\frac{dr_{gv}}{d\alpha} = -1 \quad , \quad \frac{dr_{gv}}{dv} = \varphi'(v) .$$

Di più, essendo le u=cost geodetiche, il raggio di curvatura ordinaria delle medesime coincide col raggio di curvatura principale corrispondente, e perciò si ha:

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{r_1} .$$

Ma dalla seconda delle (18), si vede che per l' ipotesi fatta di $G = \varphi_1(v)$, anche $\frac{1}{r_1} = f(v)$, e per conseguenza

$$\frac{1}{\rho_u} = f(v).$$

L' elemento (33) si trasforma ora nell' altro:

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + \frac{\varphi'(v)}{f(v)} \left\{ \varphi(v) - \alpha \right\}^2 dv^2$$

oppure

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + (\alpha - \varphi(v_1))^2 dv_1^2$$

che è appunto l' elemento d' una superficie sviluppabile.

Nel medesimo modo potrebbero studiarsi altri casi, ne' quali la (32) fosse facilmente integrabile.

RICERCHE

SULLE SUPERFICIE ELICOIDALI

E

SULLE SUPERFICIE A CURVATURA COSTANTE

INTRODUZIONE

Le ricerche seguenti hanno specialmente per iscopo lo studio delle elicoidi e trovano la loro base nelle teorie, che ho svolte nella mia tesi di laurea. (*)

L' evoluta di una superficie qualunque è composta di due falde, che sono in generale superficie distinte. Io le chiamo *superficie complementari* l' una della altra.

Data una superficie, la sua complementare risulta determinata, quando sia noto sulla prima quel sistema di geodetiche, le cui tangenti debbono essere le normali della evolvente.

Quando parlo di una superficie applicabile sopra una superficie di rivoluzione, intendo sempre, che il sistema di geodetiche in discorso sia quello delle deformate dei meridiani. Fatta questa restrizione, dimostro che ad una serie di superficie applicabili l' una sopra l' altra e sopra una superficie di rivoluzione corrispondono, come superficie com-

(*) Le citazioni, che si riferiscono a questo lavoro, saranno segnate con (m. t.).

plementari, superficie applicabili pure l' una sull' altra e sopra una superficie di rivoluzione.

Naturalmente, se si tratta di una superficie a curvatura costante, la restrizione precedente non individua un solo sistema di geodetiche, ma ne caratterizza infiniti sistemi, poichè le superficie di questa natura godono della proprietà che ogni loro porzione può applicarsi sopra qualunque altra porzione delle superficie stesse.

Particolarmente interessante è la considerazione delle superficie complementari per le superficie a curvatura costante negativa. Su queste superficie, come hanno dimostrato i professori Dini e Beltrami, esistono infiniti sistemi di geodetiche, che, presi per linee coordinate insieme alle loro traiettorie ortogonali, danno all' elemento lineare tre forme diverse appartenenti tutte tre a superficie di rivoluzione. Queste tre forme sono le seguenti:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2$$

$$ds^2 = du_1^2 + A^2 \cosh^2 \frac{u_1}{A} dv_1^2$$

$$ds^2 = du_2^2 + A^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_2}{A} dv_2^2,$$

e come è stato sopra osservato, esistono infiniti sistemi di geodetiche, sia della natura delle $v = \text{cost}$, sia di quella delle $v_1 = \text{cost}$, o finalmente delle $v_2 = \text{cost}$.

Dal teorema di Weingarten risulta facilmente, che la superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$ rispetto ad un sistema di geodetiche di 1.ª specie ($v = \text{cost}$) è ancora a curvatura costante

negativa $-\frac{1}{A^2}$; invece la superficie complementare rispetto ad un sistema di geodetiche della 2.ª specie ($v_1 = \text{cost}$) è applicabile sulla superficie di rivoluzione, il cui meridiano è la curva logaritmica.

Da ultimo la complementare rispetto ad un sistema di geodetiche di 3.ª specie ($v_2 = \text{cost}$) è applicabile sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano una curva, derivata dalla trattrice come l'ellisse dal cerchio, e propriamente proiettando la trattrice sopra un piano passante per l'assintoto. A questa curva do il nome di *trattrice accorciata*.

Ora, noto uno dei sistemi di geodetiche di 1.ª specie, si possono stabilire formole, che danno tutti gli altri infiniti sistemi della stessa specie ed anche tutti quelli di 2.ª e 3.ª specie; da ciò risulta che, data una superficie a curvatura costante negativa, sulla quale si conosca un sistema di geodetiche deformate dei meridiani della pseudosfera e le traiettorie ortogonali, possono dedursene senza calcoli di integrazione infinite superficie pure a curvatura costante negativa, infinite superficie applicabili su quella di rivoluzione logaritmica, ed infinite applicabili sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano una trattrice accorciata.

Così dalla pseudosfera stessa ho dedotto una superficie a curvatura costante negativa ed una classe di superficie applicabili su quella di rivoluzione, che ha per meridiano una trattrice accorciata. Però in causa della complicazione delle formole non ho potuto trovarne una generazione geometrica.

Ad un risultato più interessante mi ha condotto la considerazione dei sistemi di geodetiche di 2.ª specie.

Ho ottenuto così dalla pseudosfera una singolare superficie applicabile su quella logaritmica di rivoluzione; le trasformate dei paralleli di questa superficie sono catenarie

tutte eguali piegate sopra cilindri circolari concentrici, ciascuno di raggio eguale al raggio del parallelo corrispondente. Le sezioni prodotte nella superficie da piani normali alle generatrici dei cilindri sono spirali iperboliche di parametro variabile; la spirale iperbolica di parametro minimo è deformata di un meridiano. Ho dimostrato poi che questa proprietà della catenaria non appartiene ad alcuna altra curva, risolvendo così negativamente la questione, se di questa specie di deformazione erano suscettibili altre superficie di rivoluzione oltre la logaritmica, quando si sostituisse alla catenaria curve di diversa specie.

Fatte queste applicazioni del primo teorema, passo a dimostrare i teoremi fondamentali per le ricerche successive sulle elicoidi, e cioè che le evolute, le evolventi e le complementari delle elicoidi, rispetto alle traiettorie ortogonali delle eliche, sono nuove elicoidi, dello stesso asse e dello stesso passo.

Mi volgo quindi alle ricerche particolari e dimostro, che l' elicoide complementare di un' elicoide rigata è pure rigata ed applicabile sopra di essa.

Trovo l' evoluta dell' elicoide gobba ad area minima; su questa evoluta esiste un sistema semplicemente infinito di curve gobbe del 4.° ordine con un punto doppio nel punto all' infinito dell' asse.

Procedo alla ricerca delle elicoidi a linee di curvatura piane e ritrovo le notevoli elicoidi a curvatura costante negativa, che il professor Dini pel primo fece conoscere. Ne determino le elicoidi complementari, le quali hanno una relazione notevole colle elicoidi ad area minima e sono applicabili sulla saperficie di rivoluzione logaritmica. Dalle elicoidi stesse del Dini deduco una classe di superficie non elicoidali, che hanno costante la differenza fra i raggi di curvatura ed hanno per falde della evoluta due elicoidi del Dini identiche di forma e differenti fra loro solo per una traslazione lungo l' asse.

Stabilito poi il concetto di *superficie dei centri geodetici delle linee di curvatura*, come è stato posto in un recente lavoro da un egregio mio amico il Prof. Gremigni, (*) dimostro che la superficie dei centri geodetici delle elicoidi, sono nuove elicoidi dello stesso asse e dello stesso passo. Trovo l' elicoide dei centri geodetici di quelle a curvature costante negativa del Dinì.

Questa nuova elicoide ha una relazione ben semplice con quelle generali ad area minima, potendo essere generate da una medesima curva, cioè da un'elica di un cilindro avente per base una catenaria, differendone solo per il passo. Determino poi la superficie di rivoluzione applicabile sopra di essa.

Da ultimo do un modo di generazione di una classe di elicoidi applicabili sulle superficie di rivoluzione a curvatura media costante.

---

§. I. (**) Consideriamo sopra una superficie qualunque S un sistema semplicemente infinito di geodetiche e conduciamo tutte le tangenti a queste linee. Questa serie doppiamente infinita di rette ammette una serie semplicemente infinita di superficie parallele ortogonali a tutte le rette della serie. Fissiamo una di queste superficie e indichiamola con Σ.

Allora S è una falda dell'evoluta di Σ, e il segmento di tangente A B, compreso fra il punto A di partenza da S e il punto B, ove incontra ortogonalmente Σ, è uno dei raggi di curvatura di Σ, chiamiamolo r_2. L'evoluta S' di Σ

(*) Sulla teoria delle linee di curvatura. Tesi inserita in questo stesso volume degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) La parte di queste ricerche, che si riferisce alle elicoidi, è già stata pubblicata nel XVII vol. del Giornale di Matematiche diretto dal Prof. G. Battaglini.

rispetto all'altro raggio di curvatura r_1 è la superficie, che chiameremo complementare di S. Insieme con S essa costituisce l'evoluta completa di Σ.

Data S ed il sistema di geodetiche, rispetto a cui S′ ne è complementare, si può trovare quest'ultima senza previa conoscenza dell'evolvente Σ.

È evidente infatti che S′ può generarsi da S, portando sù ciascuna tangente a partire dal punto di contatto una porzione eguale alla differenza $r_2 - r_1$ dei raggi di curvatura di Σ. Ora questa differenza è eguale al raggio di curvatura geodetica della traiettoria ortogonale delle geodetiche, uscente da quel punto di contatto. (*) Possiamo quindi dare la seguente generazione per S′:

Sopra ciascuna tangente alle geodetiche del sistema si stacchi una porzione eguale al raggio di curvatura geodetica della traiettoria ortogonale delle geodetiche in quel punto. Il luogo dei nuovi estremi è la superficie S′ *complementare di* S.

Questa generazione di S′ ci dà il modo di trovarla effettivamente, quando sia data S ed il sistema di geodetiche, senza calcoli di integrazione, perchè non ne occorrono per determinare la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali.

Un altro modo di generazione di S′ si ricava da un teorema sulla costruzione del raggio di curvatura geodetica dovuto al Prof. Beltrami (**). Si consideri il sistema di linee L a tangenti coniugate colle geodetiche G. Le tangenti alle geodetiche G nei punti d'incontro con una medesima linea L godono della proprietà, che ciascuna incontra la successiva, inviluppando così una nuova linea

(*) Dini. Ricerche sopra la teoria delle superficie, § 6.

(**) Ricerche di Analisi applicata alla Geometria — Giornale di Battaglini; Vol. III, p. 17. §. XVIII.

L', la quale varia al variare di L e descrive la superficie S' complementare di S.

La costruzione precedente rende manifesto, che le tangenti al sistema di geodetiche G, ossia le normali di Σ, inviluppano S' lungo le linee L', le quali sono quindi geodetiche di S'.

§. II. Riprendiamo le considerazioni del §. precedente relative ad S, alla evolvente Σ ed ai segmenti A B di tangente. Supponiamo, che la superficie S, flessibile ed inestendibile, si deformi seco trasportando i segmenti di tangente A B. Il luogo degli estremi B non cessa mai di essere una superficie ortogonale a tutte le tangenti AB (*). Ad ogni nuova forma, che assume S, corrisponde una nuova superficie Σ; però i raggi di curvatura r_2 r_1 di Σ non variano. In quanto al primo, essendo rappresentato dalla lunghezza A B, che resta inalterata, la cosa è evidente Per il secondo poi si osservi che, essendo $r_2—r_1$ il raggio di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle geodetiche, quantità, che non varia al flettersi di S, anche esso non varia.

Supponiamo ora, che S sia applicabile sopra una superficie di rivoluzione, e che le geodetiche G siano le trasformate dei meridiani. In tal caso r_1, r_2 sono funzioni l'uno dell'altro, e possiamo considerare r_2 come funzione di r_1, a meno che non sia: r_1=cost, caso che è da escludersi, perchè allora Σ sarebbe una superficie canale ed S' si ridurrebbe ad una linea.

Per un noto teorema di Weingarten l'elemento lineare della S', evoluta di Σ rispetto al raggio r_1, sarà dato dalla formola:

(*) Ricerche di Analisi applicata alla Geometria — Giornale di Battaglini; Vol. II. p. 282.

$$ds^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv^2,$$

la quale è indipendente dalle flessioni di S, poichè durante queste r_2 rimane sempre la stessa funzione di r_1. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se una superficie di rivoluzione si deforma, la serie delle superficie complementari delle deformate è composta di snperficie applicabili sopra una medesima superficie di rivoluzione.

In particolare per es. ad una serie di elicoidi applicabili corrispondono, come superficie complementari, elicoidi pure applicabili fra loro (vedasi §. X).

Quando la superficie S ha la forma di superficie di rivoluzione, la complementare S′ si riduce ad una linea, l'asse di S, che può considerarsi come una superficie infinitamente ristretta, limite delle superficie complementari delle forme di S, quando per forme successive, per es. elicoidali di passo indefinitamente decrescente, si avvicina alla forma di superficie di rivoluzione.

Per il teorema superiore ad ogni superficie di rivoluzione ne corrisponde un'altra, come applicabile sulle superficie complementari delle infinite forme, che la prima può assumere. Propriamente ve ne corrispondono infinite deformate l'una dell'altra, ma basterà considerarne una. In generale una superficie di rivoluzione corrisponde a sè medesima, quando la relazione, che lega i raggi di curvatura della evolvente è simmetrica rispetto ai due raggi. Per es. l'alisseide, evoluta della pseudosfera corrisponde a sè medesima.

Facciamo ancora la seguente osservazione, che ha importanza in seguito. Fra due superficie complementari S, S′ viene stabilita pel modo stesso di generazione una corri-

spondenza di punto a punto, essendo corrispondenti due punti, che segnano gli estremi dei due raggi di curvatura della superficie evolvente. Allora, se S e quindi anche S′ è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, le rispettive deformate dei paralleli saranno linee corrispondenti sopra S ed S′. Infatti sopra S queste deformate sono le $r_2 = \text{cost}$ e sopra S′ le $r_1 = \text{cost}$, ma, essendo r_2 funzione di r_1, quando l'uno è costante, è costante anche l'altro.

§. III. Applichiamo ora le considerazioni generali precedenti ad una superficie S a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$ considerando le tre forme speciali:

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2,$$

$$(2) \qquad ds^2 = du_1^2 + A^2 \cosh^2 \frac{u_1}{A} dv_1^2,$$

$$(3) \qquad ds^2 = du_2^2 + A^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_2}{A} dv_2^2$$

che il suo elemento lineare può assumere.

I raggi di curvatura delle evolventi di S rispetto alle geodetiche $v = \text{cost}$ sono legati dalla relazione (*):

$$r_2 - r_1 = A,$$

sicchè, per il teorema di Weingarten ricordato al §. precedente, l'elemento lineare della complementare S′ di S rispetto alle geodetiche $v = \text{cost}$ sarà dato dalla formola:

(*) Dini — Sulle superficie di curvatura costante. Giornale di Napoli, Vol. III. — Beltrami l. c.

$$ds^2 = dr_1^2 + e^{-\frac{2r_1}{A}} dv^2;$$

ciò dimostra appunto, che questa complementare è anche essa a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$.

Invece i raggi di curvatura delle evolventi di S rispetto alle geodetiche di 2.ª specie $v_1 = \text{cost}$ sono legati dalla relazione:

$$r_2 - r_1 = A \cot h \frac{r_2 + c}{A},$$

dove c è una costante. Da questa relazione si ricava:

$$dr_1 = \cot h^2 \frac{r_2 + c}{A} dr_2,$$

e quindi, in virtù del solito teorema, l' elemento lineare della complementare S'_1 di S, rispetto alle geodetiche $v_1 = \text{cost}$ sarà dato dalla formola:

$$ds^2 = \coth^4 \frac{r_2 + c}{A} dr_2^2 + \frac{dv^2}{\text{senh}^2 \frac{r_2 + c}{A}}.$$

Questo elemento lineare si riduce alla forma ordinaria:

$$ds^2 = \{ 1 + \varphi'^2(r) \} dr^2 + k^2 r^2 d v^2$$

delle superficie di rivoluzione, ponendo

$$k r = \frac{1}{\text{senh} \frac{r_2 + c}{A}}.$$

Per determinare l'equazione $z = \varphi(r)$ della curva meridiana si ottiene quindi l'equazione differenziale:

$$1 + \varphi'^2(r) = \frac{A^2}{r^2} \left\{ 1 + k^2 r^2 \right\},$$

e, prendendo l' arbitraria $k = \frac{1}{A}$:

$$z = \varphi(r) = A \int \frac{dr}{r} = A \log r,$$

che è l'equazione della curva logaritmica.

Un calcolo perfettamente analogo può farsi per il terzo caso; allora i raggi di curvatura delle evolventi sono legati dalla relazione:

$$r_2 - r_1 = A \operatorname{tangh} \frac{r_2 + c}{A},$$

quindi per l'elemento lineare delle complementari S'_2 rispetto alle geodetiche $v_2 = \text{cost}$ si trova:

$$ds^2 = \operatorname{tangh}^4 \frac{r_2 + c}{A} + \frac{dv^2}{\cosh^2 \frac{r_2 + c}{A}}.$$

Per l'equazione $z = \varphi(r)$ della curva meridiana della superficie di rivoluzione, su cui S'_2 è applicabile, si trova quindi:

$$z = \varphi(r) = \int \frac{\sqrt{A^2 - (A^2 k^2 + 1)r^2}}{r} dr,$$

quindi se si pone:

$$r = \frac{A}{\sqrt{A^2 k^2 + 1}} \operatorname{sen} \theta,$$

si trova:

$$z = A \left\{ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta + \cos \theta \right\}.$$

Ora se si confrontano queste formole colle altre:

$$r = A \operatorname{sen} \theta \ , \ z = A \left\{ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta + \cos \theta \right\},$$

che danno la trattrice di tangente costante $= A$ (la quale,

rotando attorno all'assintoto z, genera appunto la pseudosfera applicabile sulla superficie S a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}\Big)$ si vede, che la nuova curva non è altro che la proiezione ortogonale della trattrice sopra un piano passante per l' assintoto e che fa col piano della trattrice un angolo α dato da:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2 k^2 + 1}}.$$

Ora, siccome k è una costante arbitraria, che può assumere qualunque valore positivo, α potrà assumere qualunque valore fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (i limiti esclusi). Queste curve proiezioni della trattrice, cui daremo il nome di *trattrici accorciate* hanno evidentemente una forma analoga alla trattrice stessa, avendo l'asse delle z per assintoto. Così, nello stesso tempo che abbiamo trovato la curva meridiana cercata, abbiamo anche dimostrato questa singolare proprietà della trattrice:

Le proiezioni di questa curva sopra piani passanti per l' assintoto generano, ruotando attorno a quest' assintoto altrettante superficie di rivoluzione applicabili l' una sull' altra (*).

I risultati precedenti possono enunciarsi brevemente, quando si abbia riguardo alle seguenti proprietà, dimostrate dal prof. Beltrami nel suo *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea* e cioè: le geodetiche di 1.ª specie $v =$ cost sono caratterizzate dall' avere un

(*) La trattrice gode anche di un' altra proprietà analoga, che non credo sia stata osservata. Essa è la seguente: *La superficie di rivoluzione generata da una trattrice ruotando intorno ad altrettante parallele all' assintoto, poste dalla stessa banda di questo, sono applicabili l' una sull' altra*.

punto comune a distanza infinita: le geodetiche di 2.ª specie v_1 = cost sono caratterizzate da ciò, che sono ortogonali ad una medesima geodetica della superficie: le geodetiche di 3.ª specie v_2 = cost escono da un punto reale a distanza finita della superficie.

Potremo quindi enunciare i teoremi seguenti

1.° *La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa rispetto ad un sistema di geodetiche uscenti da un punto all'infinito ha la stessa curvatura costante negativa.*

2.° *La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa rispetto ad un sistema di geodetiche, ortogonali ad una medesima geodetica, è applicabile sulla superficie logaritmica di rivoluzione.*

3.° *La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa rispetto ad un sistema di geodetiche, uscenti da un punto reale a distanza finita della superficie, è applicabile sopra la superficie di rivoluzione, generata da una trattrice accorciata, che ruota attorno all' assintoto.*

§. IV. Supponiamo noto sopra una data superficie a curvatura costante negativa S un sistema di geodetiche di 1.ª specie e le loro traiettorie ortogonali. Le formole, stabilite dal Prof. Beltrami nel suo *Saggio ec.* sopra citato, permettono di dedurre tutti i sistemi possibili di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie (*). Allora senza calcoli di integrazione ne dedurremo le superficie complementari di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie, le quali saranno rispettivamente applicabili sulla pseudosfera, sulla superficie logaritmica di rivoluzione e sopra la superficie di rivoluzione, che ha per meridiano la trattrice accorciata.

Consideriamo in particolare una superficie comple-

(*) V. nel detto lavoro le formole (15) e (16) e la Nota II.

mentare S′ di 1.ª specie a curvatura costante negativa. Su questa superficie (§. II.) conosciamo un sistema di traiettorie ortogonali di geodetiche di 1.ª specie, corrispondente al sistema noto di traiettorie ortogonali di geodetiche di 1.ª specie della superficie S, da cui siamo partiti. Per determinare adunque sopra S′ quel sistema di geodetiche di 1.ª specie non si avrà che ad integrare un'equazione differenziale del 1.º ordine e allora saremo con S′ nelle stesse condizioni, in cui eravamo con S. Potremo quindi dedurre da S′ tre nuove serie di infinite superficie, come le precedenti, e così di seguito. In tal modo con successive integrazioni di equazioni differenziali del 1.º ordine potremo moltiplicare all'infinito i risultati.

Sarebbe molto interessante vedere, se ogni superficie a curvatura costante negativa può dedursi col processo precedente partendo dalla pseudosfera e quindi anche da ogni altra superficie a curvatura costante negativa.

§. V. Ho accennato dianzi alla possibilità di dedurre da un noto sistema di geodetiche di 1.ª specie e delle loro traiettorie ortogonali tutti gli infiniti sistemi di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie. Del resto ciò risulta anche dalle considerazioni seguenti.

Nelle ammesse condizioni l'equazione generale differenziale delle geodetiche si integra immediatamente e allora, per ottenere tutti i sistemi possibili di geodetiche di 2.ª specie, basterà considerare il sistema di geodetiche ortogonali ad una stessa geodetica e far variare quest' ultima. Per ottenere poi i sistemi di 3.ª specie basta far uscire le geodetiche del sistema da un medesimo punto reale ad arbitrio della superficie. Resta solo a vedersi, come si possano ottenere tutti i sistemi di geodetiche di 1.ª specie. Per ciò mi servirò di un metodo, che è stato già usato da Liouville (*) e che spesso può applicarsi con successo.

(*) Monge-Applications de l'Analyse à la Géométrie Note IV.

Il problema da risolversi è il seguente: dato l'elemento lineare:

$$(4) \qquad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2$$

trovare le trasformazioni più generali: $u = u(\theta, \omega)$, $v = v(\theta, \omega)$, che non ne alterano la forma, cioè tali che si abbia ancora:

$$(5) \qquad ds^2 = d\theta^2 + e^{\frac{2\theta}{A}} d\omega^2$$

Riducendo le (4), (5) ai parametri isometrici, ponendo:

$$U = A e^{-\frac{u}{A}}, \quad \Theta = A e^{-\frac{\theta}{A}},$$

il problema si riduce alla stessa questione fra i due elementi lineari:

$$(4') \qquad ds^2 = \frac{A^2}{U^2}(d U^2 + dv^2)$$

$$(5') \qquad ds^2 = \frac{A^2}{\Theta^2}(d \Theta^2 + d\omega^2).$$

Trasformiamolo ancora in coordinate simmetriche immaginarie, ponendo

$$(6) \qquad \begin{cases} U + iv = \alpha \ , & \Theta + i\omega = x \\ U - iv = \beta \ , & \Theta - i\omega = y; \end{cases}$$

allora (4'), (5') divengono:

$$(4'') \qquad ds^2 = \frac{4 A^2}{(\alpha + \beta)^2} d\alpha \, d\beta$$

$$(5'') \qquad ds^2 = \frac{4 A^2}{(x + y)^2} dx \, dy.$$

Il modo più generale di trasformare la (4″) nella (5″) consiste nel porre.

$$\alpha = \varphi(x) \quad , \quad \beta = \psi(y)$$

ovvero:

$$\alpha = \varphi(y) \quad , \quad \beta = \psi(x);$$

ma, siccome il 2.° caso si deduce evidentemente dal 1.° cangiando v in $-v$, possiamo limitarci al 1.°.

Per le condizioni del problema dovremo avere:

$$(7) \qquad \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Se in questa formola si fa y=cost, si può integrare immediatamente rispetto ad x e si trova:

$$\varphi(x) = \frac{1}{ax+b} + c$$

dove a , b , c sono tre costanti. Medesimamente

$$\psi(y) = \frac{1}{dy+e} + f,$$

con d , e , f nuove costanti (*). Sostituendo allora nella (7) si vede che, per soddisfarla effettivamente, si deve avere:

$$d = a \quad , \quad e = -b \quad , \quad f = -c\,,$$

quindi:

(*) Il ragionamento seguente può essere in difetto, solo quando nella formola:

$$\varphi(x) = \frac{1}{a\,x+b} + c = \frac{1+c\,a\,x+c.b}{a\,x+b}$$

si ponga a=0 e si dia a c un valore infinito, in modo che $c\,a$ resti finito; ma allora $U+iv$ è una funzione lineare di $\theta+i\omega$ e si vede facilmente, che in tal caso non vengono cambiate le linee U, v, giacchè si ha:

$$U = a\,\theta\,, \quad \pm v = a\,\omega + b.$$

$$\alpha = \varphi(x) = \frac{1}{ax+b} + c, \quad \beta = \psi(y) = \frac{1}{ay-b} - c$$

e introducendo ora le U, v; Θ, ω per mezzo delle (6):

$$U + iv = \frac{1}{a(\Theta + i\omega) + b} + c$$

$$U - iv = \frac{1}{a(\Theta - i\omega) - b} - c$$

le costanti a, b, c debbono supporsi per più generalità complesse e però scriveremo:

$$U + iv = \frac{1}{(A + iA')(\Theta + i\omega) + B + iB'} + C + iC'$$

$$U - iv = \frac{1}{(A + iA')(\Theta - i\omega) - (B + iB')} - C - iC'.$$

Ma perchè la trasformazione sia reale, bisogna che la 2.ª formola nasca dalla 1.ª cangiando i in $-i$. Si tròva quindi facilmente, che deve aversi:

$$A' = 0 \ , \ B = 0 \ , \ C = 0$$

Separando allora le parti reale ed immaginaria, e dando a v il doppio segno per la ragione suesposta, si trova:

$$U = \frac{\Theta}{A\{\Theta^2 + (\omega + b)^2\}} \ , \ \mp v = \frac{\omega + b}{A\{\Theta^2 + (\omega + b)^2\}} + C',$$

dove per semplicità si è posto $B' = Ab$. Queste sono adunque le formole più generali, che trasformano la (4') nella (5') cambiando le coordinate.

Se si risolvono rispetto a Θ, ω si trova:

$$\Theta = \frac{U}{A\{U^2+(v-C')^2\}}\ ,\quad \omega+b = \frac{\pm v - C'}{A\{U^2+(v-C')^2\}} \quad (*)$$

§. VI. Applichiamo le formole precedenti alla pseudosfera, sulla quale conosciamo già un sistema di geodetiche di 1.ª specie (i meridiani) e le traiettorie ortogonali (i paralleli). Osservando le formole sopra stabilite, si vede subito, che dalla pseudosfera non si può ottenere che una sola superficie a curvatura costante negativa. Perciò basterà prendere le formole più semplici, caso particolare delle precedenti:

$$U = \frac{\Theta}{\Theta^2+\omega^2}\ ,\quad v = \frac{\omega}{\Theta^2+\omega^2}$$

$$\Theta = \frac{U}{U^2+v^2}\ ,\quad \omega = \frac{v}{U^2+v^2}\ ,$$

e, ripristinando le antiche coordinate:

$$(8)\quad e^{-\frac{u}{A}} = \frac{e^{-\frac{\theta}{A}}}{\omega^2+A^2 e^{-\frac{2\theta}{A}}}\ ,\quad v = \frac{\omega}{\omega^2+A^2 e^{-\frac{2\theta}{A}}}$$

$$(9)\quad e^{-\frac{\theta}{A}} = \frac{e^{-\frac{u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}\ ,\quad \omega = \frac{v}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}\ .$$

(*) Osservazione. Se si considerano U, v come coordinate cartesiane ortogonali in un piano ponendo $U=x$, $v=y$, si ha della superficie a curvatura costante negativa una rappresentazione piana, in cui gli angoli sono conservati, e le formole precedenti dimostrano che ad un sistema qualunque di geodetiche di 1.ª specie e alle traiettorie ortogonali corrisponde sul piano un doppio sistema ortogonale di cerchi, di cui i primi toccano in un medesimo punto dell'asse y una parallela all'asse x, e i secondi toccano nello stesso punto l'asse y.

Le coordinate x, y, z della pseudosfera espresse per i parametri u, v dei meridiani e dei paralleli sono:

$$10)\quad \begin{cases} x = e^{\frac{u}{A}} \cos v \\ y = e^{\frac{u}{A}} \operatorname{sen} v \\ z = \frac{1}{A}\int \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}\, du = \frac{A}{2} \log \dfrac{A - \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}}{A + \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}} + \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}} \end{cases}$$

Dobbiamo trovarne la superficie complementare rispetto al sistema di geodetiche $\omega = \text{cost}$, quindi in primo luogo calcolare i coseni di direzione X, Y, Z delle tangenti a queste linee. Avremo:

$$X = \frac{dx}{d\theta}, \quad Y = \frac{dy}{d\theta}, \quad Z = \frac{dz}{d\theta},$$

quando nelle (10) si siano espresse x, y, z per θ, ω mediante le (8). Non volendo effettuare questa sostituzione converrà calcolarle colle formole:

$$X = \frac{dx}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dx}{dv}\frac{dv}{d\theta}$$

$$Y = \frac{dy}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{d\theta}$$

$$Z = \frac{dz}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{d\theta},$$

avendo riguardo alle formole:

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{v^2-A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}, \quad \frac{dv}{d\theta}=2A\frac{v e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}},$$

che discendono dalle (8) (9). Così operando, si trova:

$$X=\frac{1}{A}\frac{v^2-A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}e^{\frac{u}{A}}\cos v-2A\frac{v e^{-\frac{u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}\operatorname{sen} v$$

$$Y=\frac{1}{A}\frac{v^2-A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}e^{\frac{u}{A}}\operatorname{sen} v+2A\frac{v e^{-\frac{u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}\cos v$$

$$Z=\frac{1}{A}\frac{v^2-A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}\sqrt{A^2-e^{\frac{2u}{A}}}$$

Il raggio ρ di curvatura geodetica delle $\theta=\text{cost}$ è dato da $\rho=A$, quindi le coordinate ξ, η, ζ della superficie complementare cercata si otterranno colle formole:

$$\xi=x-AX\ ,\quad \eta=y-AY\ ,\quad \zeta=z-AZ;$$

effettuando i calcoli, e, ponendo per semplicità:

$$e^{\frac{u}{A}} = A \operatorname{sen} \varphi ,$$

si troverà:

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = 2A \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} (\cos v + v \operatorname{sen} v) \\ \eta = 2A \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} (\operatorname{sen} v - v \cos v) \\ \zeta = A \left\{ \log \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} \varphi + \dfrac{2 \cos \varphi}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right\} \end{cases}$$

Queste equazioni definiscono una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$. Inoltre (V. §. II in fine) su questa superficie conosciamo un sistema di linee deformate dei paralleli della pseudosfera; esse sono le linee $\theta =$ cost, ossia $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+v^2 \operatorname{sen}^2\varphi} =$ cost.

In causa della complicazione delle (11) non mi è riuscito trovare di questa superficie una generazione geometrica semplice.

§ VII. Consideriamo ora sulla pseudosfera un sistema di geodetiche di 3.ª specie, cioè un sistema di geodetiche uscenti da un punto reale della superficie. Evidentemente, per la simmetria della pseudosfera intorno all'asse possiamo supporre che questo punto sia nel meridiano $v = 0$. Allora per formole di trasformazione per passare dall' elemento lineare:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2$$

all' altro:

$$ds^2 = du_2^2 + A^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_2}{A}\, dv_2^2$$

possiamo prendere le seguenti (*):

$$(12) \qquad \begin{cases} v\, e^{\frac{u}{A}} = A \operatorname{senh} \frac{u_2}{A} \operatorname{sen} v_2 \\ e^{\frac{u}{A}} = \frac{A}{k}\left(\operatorname{senh}\frac{u_2}{A} \cos v_2 + \cosh \frac{u_2}{A}\right), \end{cases}$$

essendo $\frac{A}{k}$ il raggio del parallelo, che col meridiano $v = o$ determina il punto di partenza delle geodetiche $v_2 =$ cost. Dalle (12) si ottiene facilmente:

$$(13) \qquad \cosh \frac{u_2}{A} = \frac{e^{\frac{2u}{A}}(k^2 + v^2) + A^2}{2kA\, e^{\frac{u}{A}}}$$

Allora, osservando che il raggio ρ di curvatura geodetica delle $u_2 =$ cost è dato da

$$\rho = A \operatorname{tgh} \frac{u_2}{A},$$

effettuando i calcoli come al §. precedente, si otterranno per le coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 della superficie complemen-

(*) A queste formole si giunge con alcuni calcoli preliminari, che qui sopprimo.

tare della pseudosfera rispetto alle $v_2 = \text{cost}$ le formole seguenti:

$$(14)\quad \begin{cases} \xi_1 = 2A \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{1+(k^2+v^2)\operatorname{sen}^2\varphi}(\cos v + v \operatorname{sen} v) \\ \eta_1 = 2A \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{1+(k^2+v^2)\operatorname{sen}^2\varphi}(\operatorname{sen} v - v \cos v) \\ \zeta_1 = A \left\{ \log \operatorname{tang} \dfrac{1}{2}\varphi + \dfrac{2\cos\varphi}{1+(k^2+v^2)\operatorname{sen}^2\varphi} \right\} \end{cases}$$

Su questa superficie le deformate dei paralleli della superficie di rivoluzione applicabile su di essa sono le $u_2 = \text{cost}$, ossia per la (13) le $\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{1+(k^2+v^2)\operatorname{sen}^2\varphi} = \text{cost}$ L'analogia delle (14) colle (11) è evidente; queste ci definiscono una superficie applicabile sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano la trattrice (pseudosfera), quelle una classe di superficie (contenendo la costante arbitraria k) applicabili le une sulle altre e sopra una medesima superficie di rivoluzione, avente a meridiano una trattrice accorciata. Le (11) poi provengono dalle (14) facendovi $k = 0$.

§. VIII. Andiamo ora a considerare i sistemi di geodetiche di 2.ª specie $v_1 = \text{cost}$, ciò che ci condurrà a risultati più interessanti. Queste geodetiche debbono essere ortogonali ad una medesima geodetica della superficie iniziale (pseudosfera); prese per linee coordinate insieme colle traiettorie ortogonali $u_1 = \text{cost}$ danno all'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = du_1^2 + A^2 \cos h^2 \frac{u_1}{A} dv_1^2.$$

Per geodetica, a cui tutte le $v_1 = \text{cost}$ sono ortogonali,

prendiamo il meridiano $v = 0$; allora si trova facilmente, che le formole di trasformazione sono le seguenti:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= A \log \cosh \frac{u_1}{A} + A v_1 \\ v &= A \log \operatorname{tangh} \frac{u_1}{A} e^{-v_1} \end{aligned} \right. ,$$

dalle quali segue:

$$(15') \qquad A \operatorname{sen} h \frac{u_1}{A} = v e^{\frac{u}{A}}$$

Allora, osservando che il raggio di curvatura geodetica delle $u_1 = \text{cost}$ è dato da;

$$\rho = A \coth \frac{u_1}{A}$$

ed effettuando i calcoli, si troverà per le coordinate ξ', η', ζ' della superficie complementare della pseudosfera (10) rispetto alle geodetiche $v_1 = \text{cost}$:

$$\xi' = \frac{A \operatorname{sen} v}{v \operatorname{sen} \varphi}, \quad \eta' = -\frac{A \cos v}{v \operatorname{sen} \varphi}, \quad \zeta' = A \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi,$$

dove si è posto $e^{\frac{u}{A}} = A \operatorname{sen} \varphi$. Evidentemente, senza alterare la superficie, possiamo scriverne le coordinate così:

$$(16) \quad x = \frac{A}{v \operatorname{sen} \varphi} \cos v, \quad y = \frac{A}{v \operatorname{sen} \varphi} \operatorname{sen} v, \quad z = A \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi.$$

Se introduciamo le coordinate cilindriche r, θ, z ponendo:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},$$

avremo per le (16):

$$(17)\qquad r=\frac{A}{v\operatorname{sen}\varphi},\quad \theta=v$$

e, siccome da

$$z=A\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$$

segue:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}=\cosh\frac{z}{A},$$

si vede che l' equazione della superficie (16) in coordinate cilindriche sarà:

$$(18)\qquad r\theta=A\cosh\frac{z}{A}.$$

Dunque: *questa superficie è generata da una spirale iperbolica, il cui polo percorre l' asse* z *e il cui piano rimane normale all' asse stesso, mentre la spirale varia di grandezza colla legge assegnata dalla formola precedente.* La superficie è evidentemente simmetrica rispetto al piano xy.

Le trasformate dei paralleli della superficie logaritmica di rivoluzione, sulla quale la superficie (16) è applicabile sono le $u_1=\text{cost}$, ossia per la (15′) le $v\operatorname{sen}\varphi=\text{cost}$. Ma

per la 1.ª delle (17) le $v \operatorname{sen} \varphi = \text{cost}$ non sono altro che le $r = \text{cost}$; ora, se si considera uno qualunque dei cilindri circolari $r = \text{cost}$ e si distende sopra un piano, la curva della nostra superficie, che giace su di esso, si dispone per la (18) secondo una catenaria comune di parametro A indipendente dal raggio del cilindro. Di più si vede, che le direttrici di queste catenarie *cilindriche* sono tutte in un piano per l'asse comune dei cilindri e i loro vertici sono sopra un piano normale a quest'asse (il piano xy) (*). Possiamo dunque dire che: *Quando la superficie logaritmica di rivoluzione si applica sulla superficie* (16) *i paralleli divengono catenarie eguali piegate sopra cilindri circolari concentrici.*

Osserviamo poi, che tutte queste catenarie cilindriche escono dal piano $x\,y$ normalmente alla spirale iperbolica luogo dei loro vertici; questa spirale iperbolica è dunque deformata di un meridiano.

Vogliamo ora ridurre direttamente l'elemento lineare della nostra superficie a quello ordinario della superficie logaritmica di rivoluzione, il che, mentre servirà di conferma ai risultati ottenuti, darà anche luogo ad un' ulteriore proprietà di questa singolare deformazione. Se si calcola l'elemento lineare della superficie (16) in coordinate v e φ si trova;

$$ds^2 = \frac{A^2}{v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi^2 + 2\, \frac{\cos \varphi}{v \operatorname{sen} \varphi} dv\, d\varphi + \frac{1 + v^2}{v^2} dv^2 \right\}$$

Ora, se si pone

$$(19) \qquad v \operatorname{sen} \varphi = t\,, \quad v \cos \varphi = \omega\,,$$

(*) Queste proprietà renderebbero facile la costruzione effettiva di un modello di questa superficie.

la formola precedente si trasforma nell' altra:

$$ds^2 = A^2 \left\{ \frac{1+t^2}{t^4} dt^2 + \frac{1}{t^2} d\omega^2 \right\},$$

e ponendo

$$(20) \qquad t = \frac{A}{\rho}, \frac{\omega}{A} = \psi,$$

si ottiene:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{A^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2,$$

che è la forma ordinaria dell' elemento lineare della superficie logaritmica di rivoluzione $z = A \log \rho$. Dalle (20), (19) confrontate colla (17) si trae.

$$\rho = r,$$

dunque *ogni catenaria cilindrica della superficie* (16), *diventando un parallelo della superficie logaritmica di rivoluzione assume un raggio eguale a quello del cilindro, su cui è descritta.*

Osserviamo da ultimo che, analogamente a quello che accade quando le elicoidi si applicano sulle superficie di rivolùzione, colla superficie (16) si ricoprirà infinite volte la superficie logaritmica di rivoluzione, avvolgendo continuamente ciascuna catenaria cilindrica sul parallelo corrispondente. Se poi vogliamo riferirci unicamente alla superficie (16), possiamo dire, che questa superficie gode della proprietà di essere distendibile sopra sè medesima, in modo, che qualunque porzione di una ad arbitrio delle sue catenarie cilindriche si avvolga su qualunque altra porzione della medesima catenaria.

§. IX. La proprietà, che nel §. precedente abbiamo visto appartenere alla catenaria, dà luogo naturalmente alla domanda, se essa sia comune ad altre curve, od esclusiva alla catenaria. In altre parole: con una curva diversa dalla catenaria si può, come colla catenaria si genera la superficie (16), generare una superficie applicabile sopra una superficie di rivoluzione, e tale che le deformate dei paralleli siano precisamente le posizioni di quella curva, piegata sui cilindri circolari concentrici?

Le coordinate di queste superficie generalizzate sarebbero:

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\ ,\ z = \Omega(r\theta)\ ,$$

dove $\Omega(r\theta)$ indica una funzione arbitraria di $r\theta$. L'elemento lineare di queste superficie in coordinate r, θ si trova dato da:

$$ds^2 = \mathrm{E}dr^2 + 2\,\mathrm{F}dr\,d\theta + \mathrm{G}d\theta^2,$$

dove E, F, G hanno i valori seguenti:

$$\mathrm{E} = 1 + \theta^2\Omega'^2(r\theta)\ ,\ \mathrm{F} = r\theta\,\Omega'^2(r\theta),\ \mathrm{G} = r^2\left\{1 + \Omega'^2(r\theta)\right\}.$$

Ma, per ipotesi, le linee $r = \mathrm{cost}$ sono deformate dei paralleli di una superficie di rivoluzione, quindi debbono essere geodeticamente parallele fra loro. Ora è noto essere necessario per questo, che:

$$\frac{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}{\mathrm{G}} = \mathrm{E} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{G}}$$

sia indipendente da θ. Sostituendo i valori di E, F, G si ottiene:

$$E - \frac{F^2}{G} = 1 + \frac{\theta^2 \Omega'^2 (r\theta)}{1 + \Omega'^2 (r\theta)},$$

dunque:

$$\theta \frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}}$$

deve essere indipendente da θ. Derivando rispetto a θ si ricava:

$$\frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}} + r\theta \left\{ \frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}} \right\}' = 0 ,$$

da cui integrando:

$$\frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}} = \frac{A}{r\theta}$$

essendo A una costante. Se ne deduce:

$$\Omega'(r\,\theta) = \frac{A}{\sqrt{r^2\,\theta^2 - A^2}}$$

e integrando di nuovo, omettendo la costante additiva, che non influisce sul risultato:

$$\Omega\,(r\,\theta) = A \text{ sett} \cosh \frac{r\,\theta}{A}$$

dunque di superficie della classe assegnata, che godano della proprietà voluta, non vi può essere che la seguente:

$$r\,\theta = A \cosh \frac{z}{A}.$$

Siamo così ricondotti alla superficie (18) e resta quindi dimostrato, che quella proprietà appartiene esclusivamente alla catenaria.

§. X. Fatte queste applicazioni delle proprietà delle superficie complementari alle superficie a curvatura costante negativa, passo ad occuparmi delle superficie elicoidali.

I teoremi fondamentali sulle evolute e sulle evolventi delle elicoidi si possono dimostrare geometricamente, fondandosi sull' osservazione semplicissima, che dando ad un' elicoide E intorno all'asse quel moto elicoidale, che l' ha generata, o il moto retrogrado, essa non fa altro, che scorrere sopra sè stessa.

Ora se si suppone tracciata sull' elicoide E una linea di curvatura C, e si dà a questa linea intorno all'asse il moto elicoidale, che ha generato E, essa si manterrà sempre sull' elicoide, e sarà sempre nelle sue diverse posizioni linea di curvatura di E; poichè, se le normali ad E lungo la posizione primitiva di C si suppongono trasportate insieme con questa linea, esse si conservano sempre normali all' elicoide per l' osservazione fondamentale fatta sopra. Ora nella loro posizione primitiva inviluppavano una linea G, e quindi nelle nuove posizioni successive inviluppano le posizioni successive della linea G, il che dimostra evidentemente, che le posizioni successive di C sono linee di curvatura di E.

Risulta inoltre da queste considerazioni, che l'evoluta dell' elicoide E, rispetto al sistema C di linee di curvatura, è un' elicoide dello stesso asse e dello stesso passo, generata dallo spigolo di regresso G della sviluppabile luogo delle normali all'elicoide E lungo una linea di curvatura C. Si ha quindi il teorema, che altrove ho dimostrato per altra via: (*) *L'evoluta d' un elicoide è un'al-*

(*) M. T. pag. 49.

tra elicoide, avente a comune colla prima l'asse ed il passo.

§. XI. Considerazioni affatto analoghe alle precedenti mostrano, che sull' elicoide E le traiettorie ortogonali delle eliche, ossia le trasformate dei meridiani della superficie di rivoluzione su cui l' elicoide è applicabile, sono curve identiche, che si ottengono da una di esse, dandole attorno all' asse quel moto elicoidale, che ha generato E.

Questa osservazione ci servirà a determinare l' evolvente di E rispetto a quelle geodetiche g traiettorie ortogonali delle eliche.

Consideriamo una di queste geodetiche ed il sistema delle sue tangenti e sulla sviluppabile luogo di queste rette tracciamo una curva t traiettoria ortogonale di queste tangenti, cioè una evolvente della g.

Dico, che l'elicoide E', generata da t intorno all'asse di E collo stesso moto elicoidale, che ha generato E, è una delle evolventi di E.

Insieme con t durante il moto supponiamo trasportata la g col sistema delle sue tangenti; allora g verrà ad occupare sopra E le posizioni successive di tutte le traiettorie ortogonali delle eliche e le tangenti quelle delle tangenti, sicchè il teorema sarà dimostrato, quando si provi, che ognuna di queste tangenti è normale ad E'.

Nella posizione primitiva sia A B una di queste tangenti, essendo A il punto di contatto con g e B il punto ove incontra t. Consideriamo un elemento infinitesimo del moto elicoidale; per questo moto infinitesimo il punto A descrive un elemento di elica di E, il quale è normale alla retta A B, poichè g sega ortogonalmente tutte le eliche di E. Quindi, per una nota proprietà, (*), tutti i punti di A B e in particolare il punto B descriveranno

(*) V. De-Jonquières. Mélanges de Géometrie pure, p. 15.

elementi di traiettorie normali alla posizione attuale di A B. Adunque essendo A B normale a due diverse direzioni uscenti da B sull' elicoide E', cioè alla curva *t* ed alla traiettoria di B, è normale all' elicoide stessa.

Abbiamo dunque il teorema:

Le evolventi delle elicoidi sono elicoidi, aventi a comune colle prime l' asse ed il passo.

Come conseguenza necessaria di questo teorema e di quello del §. precedente abbiamo l'altro:

La superficie complementare di un' elicoide è una nuova elicoide dello stesso asse e dello stesso passo.

Questo teorema potrebbe anche dimostrarsi direttamente con considerazioni analoghe.

§. XII. Dalle considerazioni geometriche dei §§. precedenti scaturiscono spontaneamente alcune conseguenze che è utile notare, cioè:

Le eliche di un' elicoide sono traiettorie delle sue linee di curvatura. Conseguentemente l' elemento lineare di un' elicoide, riferito alle linee di curvatura u, v deve assumere la forma (*):

$$ds^2 = f^2(u+v)\,du^2 + \varphi^2(u+v)\,dv^2.$$

Lungo le eliche ($u+v=$cost) non variano i raggi di curvatura di un'elicoide, i quali sono quindi funzioni l' uno dell' altro.

Se si fa la rappresentazione di Gauss di un' elicoide sulla sfera, le immagini delle linee di curvatura di un medesimo sistema sono curve eguali, che si ottengono da una di esse, facendola ruotare attorno al diametro della sfera parallela all'asse dell' elicoide; questo diametro è

(*) Dini *sulle superficie di curvatura costante*. Giornale di Napoli, Vol. III. pag. 241.

perpendicolare ai piani dei paralleli della sfera, immagini delle eliche. Questi paralleli sono quindi traiettorie delle immagini delle linee di curvatura, e perciò l'elemento sferico ds_1 in coordinate u, v assume la forma:

$$ds_1^2 = f_1^2 (u+v)\, du^2 + \varphi_1^2 (u+v)\, dv^2.$$

Se un elicoide ha una linea di curvatura piana, tutte le altre linee di curvatura dello stesso sistema sono piane; i loro piani tagliano l'elicoide tutti sotto uno stesso angolo e segano l'asse pure sotto un medesimo angolo.

Se un' elicoide ha una linea di curvatura sferica, tutte le altre linee di curvatura dello stesso sistema sono sferiche, le sfere, su cui giacciono hanno tutte lo stesso raggio, tagliano l' elicoide sotto un medesimo angolo, e il luogo dei loro centri è un' elica circolare, avente lo stesso asse dell' elicoide ed il medesimo passo.

§. XIII. Andiamo ora alle ricerche particolari e cerchiamo in primo luogo l' elicoide complementare di un' elicoide rigata.

Sia a la minima distanza della generatrice dall'asse, α l' angolo che queste due rette fanno tra loro, m il parametro del moto elicoidale. Le coordinate x, y, z dell'elicoide saranno date dalle formole:

$$x = a \cos v - u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v$$

$$y = a \operatorname{sen} v + u \operatorname{sen} \alpha \cos v$$

$$z = u \cos \alpha + m v,$$

dove u indica la lunghezza della generatrice contata dal piede della perpendicolare all' asse.

Per l' espressione dell' elemento lineare in coordinate u, v si trova facilmente:

(21) $$ds^2 = du^2 + 2(m \cos \alpha + a \operatorname{sen} \alpha)\, du\, dv + (a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)\, dv^2$$

Quest' espressione si riduce alla forma ordinaria dell' elemento lineare della superficie di rivoluzione colle sostituzioni (*).

$$t = v + (m \cos\alpha + a \operatorname{sen}\alpha) \int \frac{du}{a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$w = \int \frac{\sqrt{a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha - (m\cos\alpha + a\operatorname{sen}\alpha)^2}}{\sqrt{a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} du,$$

poichè essa diventa allora:

$$ds^2 = dw^2 + (a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha)\, dt^2$$

Pel raggio ρ di curvatura geodetica delle $w = \text{cost}$ si trova:

$$\rho = \frac{\sqrt{(a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha)[a^2 + m^2 + u^2\operatorname{sen}^2\alpha - (m\cos\alpha + a\operatorname{sen}\alpha)^2]}}{u \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Con queste formole, eseguendo i calcoli, si trova per le coordinate ξ, η, ζ dell' elicoide complementare:

$$\xi = -m \cot\alpha \cos v + \frac{m(m\operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha)}{u \operatorname{sen}^2\alpha} \operatorname{sen} v$$

$$\eta = -m \cot\alpha \operatorname{sen} v - \frac{m(m\operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha)}{u \operatorname{sen}^2\alpha} \cos v$$

$$\zeta = \frac{a(m\operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha)}{u\operatorname{sen}^2\alpha} + m v$$

Queste equazioni definiscono un' altra elicoide rigata, che ha per generatrice la retta:

(*) m. t. §. 4.

$$x = -m \cot \alpha \,, \quad y = -\frac{m}{\sqrt{m^2+a^2}}\, u_1 \,, \quad z = \frac{a}{\sqrt{m^2+a^2}}\, u_1 \,.$$

Indicando con a_1, α_1 le quantità analoghe ad a, α per questa seconda elicoide, si avrà:

$$(22) \qquad a_1 = m \cot \alpha \,, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{m}{a}$$

Queste relazioni, come è naturale, sono reversibili, cioè:

$$a = m \cot \alpha_1 \,, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{a_1}$$

Ora servendosi della (21) per calcolare l'elemento lineare di questa elicoide ed avendo riguardo alle (22) si trova facilmente che essa è applicabile sulla primitiva, sicchè possiamo enunciare il teorema:

L'elicoide complementare di un' elicoide rigata è pure rigata ed applicabile sopra di essa.

Notiamo, che dalle (22) discende, che, se l' elicoide primitiva è a direttrice rettilinea, la complementare è a piano direttore e viceversa. In particolare, se la primitiva è l'elicoide gobba ad area minima $\left(a=0 \,, \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$, la complementare coincide con essa, come del resto è evidente di per sè poichè in questo caso le tangenti alle deformate dei meridiani coincidono colle generatrici stesse. È notevole il caso in cui si abbia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{a}$, poichè allora le (22) danno $a_1 = a$, $\alpha_1 = \alpha$. L' elicoide primitiva è allora identica colla complementare; ne differisce però per la posizione, ottenendosi da questa con una rotazione di due angoli retti intorno all' asse.

§. XIV. Le evolute delle elicoidi generali rigate sono complicate, e perciò mi limito a trovare l' evoluta dell'elicoide gobba ad area minima.

Le coordinate di questa elicoide sono date dalle formole ;

$$x = u \cos v \ , \ y = u \operatorname{sen} v \ , \ z = m v \, ,$$

per i coseni di direzione X , Y , Z della normale si trova

$$X = \frac{m \operatorname{sen} v}{\sqrt{u^2 + m^2}} \ , \ Y = - \frac{m \cos v}{\sqrt{u^2 + m^2}} \ , \ Z = \frac{u}{\sqrt{u^2 + m^2}}$$

Siccome poi si ha

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + m^2) \, d v^2,$$

la curvatura $\frac{1}{r_1 r_2}$ sarà:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = - \frac{m^2}{(u^2 + m^2)^2} ;$$

ma $r_1 + r_2 = 0$, quindi:

$$r_2 = - \frac{u^2 + m^2}{m} \ , \ r_1 = \frac{u^2 + m^2}{m}$$

le coordinate ξ , η , ζ dell' evoluta rispetto al raggio r_1 per es. si trovano date da

$$\xi = u \cos v + \sqrt{u^2 + m^2} \operatorname{sen} v$$

$$\eta = u \operatorname{sen} v - \sqrt{u^2 + m^2} \cos v$$

$$\zeta = \frac{u \sqrt{u^2 + m^2}}{m} + m v \, .$$

Queste equazioni definiscono un' elicoide generata attorno all' asse z dalla curva:

$$x = u\,, \; y = -\sqrt{u^2+m^2}\quad , \; z = \frac{u\sqrt{u^2+m^2}}{m}\,,$$

la quale è l' intersezione delle due superficie seguenti:

$$m\,z + x\,y = 0 \quad , \quad y^2 - x^2 = m^2\,.$$

La prima è un paraboloide iperbolico equilatero, la seconda un cilindro parallelo all'asse z, avente per sezione retta un' iperbola equilatera, i cui assi sono paralleli alle due rette $x=0$, $y=0$, che il paraboloide ha sul piano $x\,y$. Il punto all' infinito dell' asse z appartiene tanto al paraboloide quanto al cilindro, ed è perciò un punto doppio della loro intersezione. Quindi:

L'evoluta di un' elicoide gobba ad area minima è un' elicoide generata da una curva gobba del 4.° ordine con un punto doppio nel punto all'infinito dell'asse.

È da notarsi, che pel teorema di Weingarten questa evoluta elicoidale è applicabile sull' evoluta dell'alisseide.

§. XV. Cerchiamo ora se esistono elicoidi, che abbiano una linea di curvatura piana e quindi (§. XII) un intero sistema di linee di curvatura piane. Il sistema accennato sia quello delle linee v. Allora sulla sfera rappresentativa le linee v saranno cerchi eguali (§. XII), cioè linee aventi la stessa curvatura geodetica costante.

Ora l'elemento lineare della sfera sarà dato in coordinate u, v dalla formola:

$$(23) \qquad ds^2 = f^2(u+v)\,d\,u^2 + \varphi^2(u+v)\,d\,v\,.$$

Se indichiamo con $\sqrt{a^2-1}$ la curvatura geodetica delle

linee v (per semplicità del calcolo ulteriore) ed $u+v$ con x, si dovrà quindi avere:

$$\varphi = \frac{1}{f\sqrt{a^2-1}} \frac{df}{dx}.$$

Esprimendo, che la curvatura della superficie, il cui elemento lineare è dato dalla (23) è l'unità positiva, avremo per determinare f la equazione differenziale:

$$\frac{1}{\frac{df}{dx}} \frac{d}{dx} \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - f\frac{d^2 f}{dx^2}}{f^3} = a^2.$$

Questa equazione, non contenendo la variabile indipendente, si integra con noti processi e si trova:

$$u+v = \int \frac{df}{f\sqrt{C^2+cf-a^2f^2}}$$

dove C, c sono nuove costanti.

Limitandoci al caso di $c=0$, troveremo:

$$f(u+v) = \frac{C}{a\cosh C(u+v)}, \quad \varphi(u+v) = \frac{C}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{tgh} C(u+v)$$

e cambiando C u, C v, rispettivamente in u, v, potremo anche scrivere:

$$(24) \quad f(u+v) = \frac{1}{a\cosh(u+v)}, \quad \varphi(u+v) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{tgh}(u+v)$$

Per i raggi r_2, r_1 della superficie richiesta trovere-

mo facilmente dalle note equazioni differenziali, che li legano ad f, φ (*):

$$(25) \quad r_2 = \text{A senh}\,(u+v) \;,\; r_1 = -\frac{\text{A}}{\text{senh}\,(u+v)},$$

dove A è una costante arbitraria e l'altra si è tralasciata, perchè comparendo additivamente sì in r_1 che in r_2, non darebbe che delle elicoidi parallele alle precedenti.

Queste elicoidi sono per le (25) a curvatura costante negativa $-\frac{1}{\text{A}^2}$.

Per le (15) l'elemento lineare della sfera in coordinate u, v assume la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{a^2 \cosh^2(u+v)} du^2 + \frac{1}{a^2-1} \text{tgh}^2 (u+v)\, dv^2,$$

che si deduce dall' ordinaria:

$$ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\,\theta\, d\omega^2$$

colle sostituzioni:

$$\cos\theta = \frac{1}{a \cosh(u+v)} \;,\; \omega = \frac{v}{\sqrt{a^2-1}} - \text{arc tg}\left(\frac{\text{tgh}\,(u+v)}{\sqrt{a^2-1}}\right).$$

Quindi le coordinate X, Y, Z dei punti della sfera, che espresse per θ, ω sono:

$$\text{X} = \text{sen}\,\theta \cos\omega \;,\; \text{Y} = \text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\omega \;,\; \text{Z} = \cos\theta,$$

quando si esprimano per u, v diverranno:

(*) Dini. *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie:* §. 24.

$$(26)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} + \dfrac{1}{a}\,\mathrm{tgh}\,(u+v)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ Y = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \quad \dfrac{1}{a}\,\mathrm{tgh}\,(u+v)\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ Z = \dfrac{1}{a\cosh(u+v)} \end{cases}$$

Le coordinate x, y, z dell' elicoide verranno quindi date dalle formole:

$$x = \int\left(r_2\frac{dX}{du}\,du + r_1\frac{dX}{dv}\,dv\right)$$

$$y = \int\left(r_2\frac{dY}{du}\,du + r_1\frac{dY}{dv}\,dv\right)$$

$$z = \int\left(r_2\frac{dZ}{du}\,du + r_1\frac{dZ}{dv}\,dv\right).$$

Avendo riguardo alle (25), (26), ed eseguendo le derivazioni e le quadrature, si troverà:

$$(27)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{A}{a}\,\dfrac{1}{\cosh(u+v)}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ y = \dfrac{A}{a}\,\dfrac{1}{\cosh(u+v)}\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ z = \dfrac{A}{a}\left\{\mathrm{tgh}\,(u+v) - (u+v)\right\} + \dfrac{A}{a}\,v\,. \end{cases}$$

Questa elicoide ha per profilo meridiano la curva delle tangenti costanti $= \dfrac{A}{a}$. Tali profili (trattrici) sono le linee di curvatura del sistema v.

Le linee di curvatura dell'altro sistema u sono tracciate sopra sfere di raggio $\frac{A}{a}$, che tagliano ortogonalmente l'elicoide ed hanno i loro centri sull'asse (*).

§. XVI. Troviamo ora l'elicoide complementare della (27); perciò osserviamo, che l'elemento lineare delle (27) in coordinate u, v, in causa delle (24), (25) assume la forma:

$$(27') \quad ds^2 = \frac{A^2}{a^2} \operatorname{tgh}^2 (u+v)\, du^2 + \frac{A^2}{a^2-1} \frac{1}{\cosh^2(u+v)} dv^2.$$

Per ridurlo alla forma ordinaria delle superficie di rivoluzione, basta porre (**).

$$(28) \begin{cases} w = -A \displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} \omega\, d\omega}{\cosh \omega \sqrt{1+(a^2-1)\cosh^2 \omega}} = A \operatorname{sett\,senh} \frac{1}{\cosh\omega \sqrt{a^2-1}} \\ t = \displaystyle\frac{1}{a} \left\{ v - (a^2-1) \int \frac{\operatorname{senh}^2 \omega\, d\omega}{1+(a^2-1)\cosh^2 \omega} \right\} = \operatorname{sett\,tgh} \left(\frac{\operatorname{tgh} \omega}{a} \right) - \frac{u}{a}, \end{cases}$$

dove per brevità si è posto $u+v=\omega$. Con queste sostituzioni l'elemento lineare (27') assume infatti la forma:

$$(29) \quad ds^2 = dw^2 + A^2 \cosh^2 \frac{w}{A} d\,t^2.$$

Ciò mostra intanto, che l'elicoide complementare cercata è applicabile sulla superficie logaritmica di rivoluzione (V. §. III). Per mezzo delle formole precedenti si trova poi per le coordinate ξ, η, ζ dell'elicoide complementare:

(*) Sono queste le notevoli elicoidi trovate la prima volta dal Prof. Dini. V. *Ricerche sopra la teoria delle superficie*.

(**) m. t. § 4.

$$
(29')\begin{cases}
\xi = -\dfrac{A\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{senh}\omega\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} + \dfrac{A(a^2-1)}{a}\cosh\omega\operatorname{sen}\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}}\\[2mm]
\eta = -\dfrac{A\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} - \dfrac{A(a^2-1)}{a}\cosh\omega\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}}\\[2mm]
\zeta = -\dfrac{A}{a}\,\omega + \dfrac{A}{a}\,v\,.
\end{cases}
$$

Queste elicoidi sono generate attorno all'asse z dalla curva:

$$
x = -\frac{A\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{senh}\omega\,,\quad y = -\frac{A(a^2-1)}{a}\cosh\omega\,,\quad z = -\frac{A}{a}\omega\,,
$$

la quale si proietta sul piano xy secondo una curva, che deriva dalla catenaria, come l' ellisse del cerchio. L'analogìa di queste superficie con quelle elicoidali ad area minima (*) è evidente.

Vi è poi un caso, in cui esse ammettono il medesimo profilo ed hanno inoltre il medesimo passo, differendo soltanto pel senso in cui girano le eliche, che sono *destrorse* per le une, *sinistrorse* per le altre. Si può infatti enunciare il teorema:

La curva:

$$
x = m\operatorname{senh}\omega\ ,\quad y = m\cosh\omega\ ,\quad z = m\,\omega
$$

con un moto elicoidale di parametro $+$m *intorno all' asse* z *genera un' elicoide ad area minima (applicabile sull'alisseide); con un moto elicoidale di parametro* $-$m *genera un' elicoide complementare di un'elicoide a curvatura costante negativa (applicabile sulla superficie logaritmica di rivoluzione).* Questa curva è elica del cilindro, che la proietta sul piano $y\,z$, cilindro la cui

(*) m. t. §. 24.

sezione retta è una catenaria, e ne taglia le generatrici sotto un angolo di 45.°

§. XVII Dalle elicoidi (27) a curvatura costante negativa potremmo dedurre tre classi di superficie complementari, come abbiamo fatto nei §§. VI, VII, VIII colla pseudosfera; qui però mi limiterò ad una sola ricerca, che darà una proprietà notevole di queste elicoidi.

Consideriamo su queste elicoidi un sistema di geodetiche di 1.ª specie; e precisamente quel sistema speciale, di cui le eliche sono traiettorie (*). Per formole di trasformazione si hanno le seguenti:

$$U = A \log \cosh \frac{w}{A} + A\, t$$

$$V = A \operatorname{tgh} \frac{w}{A}\, e^{-t}$$

dove V=cost sono le geodetiche di 1.ª specie accennate, che colle traiettorie ortogonali U=cost danno all'elemeuto lineare la forma:

$$d s^2 = d U^2 + e^{\frac{2U}{A}}\, d V^2 .$$

Siccome le V=cost hanno per traiettorie le eliche, ne segue, che si ottengono tutte da una di esse, dandole attorno all' asse quel moto elicoidale, che ha generato l' elicoide stessa. Dalle considerazioni dei §§. X, XI risulta quindi, che la superficie complementare di quell' elicoide rispetto alle V=cost è una nuova elicoide, avente a comune colla primitiva l'asse ed il passo. Inoltre questa elicoide (§. III.) è a curvatura costante negativa.

(*) Dini. *Sulle superficie di curvatura costante* l. c.

Ora per mezzo delle formole precedenti, si ottiene per le coordinate x_1, y_1, z_1 di questa elicoide complementare:

$$x_1 = -\frac{A}{a} \frac{\sqrt{a^2-1}}{\operatorname{senh}\omega + a\cosh\omega} \cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$y_1 = \frac{A}{a} \frac{\sqrt{a^2-1}}{\operatorname{senh}\omega + a\cosh\omega} \operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$z_1 = \frac{A}{a} \left\{ \frac{\cosh\omega + a\operatorname{senh}\omega}{\operatorname{senh}\omega + a\cosh\omega} - \omega - a \right\} + \frac{A}{a} v.$$

Ma, se si pone:

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{\operatorname{senh}\omega + a\cosh\omega} = \frac{1}{\cosh\theta},$$

ne risulta:

$$\operatorname{tgh}\theta = \frac{\cosh\omega + a\operatorname{senh}\omega}{\operatorname{senh}\omega + a\cosh\omega} = \frac{\frac{1}{a} + \operatorname{tgh}\omega}{1 + \frac{1}{a}\operatorname{tgh}\omega} = \operatorname{tgh}(\omega + \alpha),$$

dove si è posto

$$\operatorname{tgh}\alpha = \frac{1}{a},$$

il che dà un valore reale per α, poichè $a > 1$. Avremo quindi:

$$\theta = \omega + \alpha$$

Allora, se nelle formole precedenti, che danno x_1, y_1, z_1, si aumenta $\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$ di $\frac{\pi}{2}$ si ottiene:

$$x_1 = -\frac{A}{a\cosh\theta}\,\text{sen}\,\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$y_1 = \frac{A}{a\cosh\theta}\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$z_1 = \frac{A}{a}\left\{\text{tgh}\,\theta - \theta + v + \alpha - a + \frac{\pi\sqrt{a^2-1}}{2}\right\}.$$

Se si confrontano queste equazioni colle (27), si vede subito, che esse rappresentano la medesima elicoide, spostata lungo l'asse della quantità $\frac{A}{a}\left(\alpha - a + \frac{\pi\sqrt{a^2-1}}{2}\right)$. Le coordinate ξ, η, ζ delle evolventi delle elicoidi (27) rispetto alle geodetiche $V = \text{cost}$ si ottengono con note formole che richiedono una sola quadratura (*). Eseguendola si ottengono le formole seguenti:

$$(30)\quad \begin{aligned}
\xi &= \frac{A\sqrt{a^2-1}}{a^2}\,\frac{1}{\text{senh}\,\omega + a\cosh\omega}\left\{C + v - \omega + a\log(a + \text{tgh}\,\omega)\right\}\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
&\quad + \frac{A}{a^2\cosh\omega}\left\{C - a + v - \omega + a\log(a + \text{tgh}\,\omega)\right\}\text{sen}\,\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
\eta &= \frac{A\sqrt{a^2-1}}{a^2}\,\frac{1}{\text{senh}\,\omega + a\cosh\omega}\left\{C + v - \omega + a\log(a + \text{tgh}\,\omega)\right\}\text{sen}\,\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
&\quad - \frac{A}{a^2\cosh\omega}\left\{C - a + v - \omega + a\log(a + \text{tgh}\,\omega)\right\}\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
\zeta &= \frac{A}{a^2\cosh\omega(\text{senh}\,\omega + a\cosh\omega)}\left\{C + v - \omega + a\log(a + \text{tgh}\,\omega)\right\} \\
&\quad - \frac{A}{a}\left\{C - \text{tgh}\,\omega + a\log(a + \text{tgh}\,\omega)\right\},
\end{aligned}$$

dove C è una costante arbitraria, variando la quale si ha un sistema di superficie parallele.

(*) Beltrami. *Ricerche di Analisi* etc. l. c.

Le equazioni precedenti definiscono una clàsse di superficie, che certamente non sono elicoidali, poichè altrimenti sull' elicoidi (27) le V = cost dovrebbero essere le traiettorie ortogonali delle eliche (V. §§. X, XI); inoltre i raggi di curvatura delle superficie di questa classe sono legati fra loro dalla relazione (V. §. III):

$$r_2 - r_1 = \mathrm{A}$$

Possiamo dunque dire:

Le superficie (30) *hanno costante ed eguale ad* A *la differenza fra i raggi di curvatura; inoltre le due falde dell'evoluta sono elicoidi identiche a curvatura costante negativa* $-\frac{1}{\mathrm{A}^2}$, *aventi a profilo una trattrice, le quali differiscono fra loro solo per una traslazione lungo l' asse.*

Se nelle formole precedenti si cambia $\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$ in v e si passa al limite per $a = 1$, si ottiene la superficie di rivoluzione, che ha per meridiano l' evolvente della trattrice.

§. XVIII. Data una superficie qualunque, le tangenti alle linee di curvatura di uno stesso sistema lungo i punti di una linea di curvatura qualunque dell' altro sistema formano una sviluppabile, e le porzioni di dette tangenti, comprese fra la linea di curvatura considerata e lo spigolo di regresso della sviluppabile, sono i raggi di curvatura geodetica della stessa linea di curvatura. Questa proprietà, che il Gremigni nel lavoro citato dimostra per via puramente geometrica, risulta anche, come caso particolare, da una costruzione generale, pel raggio di curvatura geodetica di una linea qualunque, dovuta

al Prof. Beltrami, costruzione, che ho già avuto occasione di richiamare al §. I.

Variando la linea di curvatura accennata nel suo sistema, lo spigolo di regresso di quella sviluppabile genera una superficie, che il Gremigni ha chiamato *superficie dei centri geodetici* di quel sistema di linee di curvatura.

Le semplici considerazioni geometriche, di cui ho fatto uso ai §§. X, XI conducono immediatamente a stabilire il teorema:

Le superficie dei centri geodetici di un' elicoide sono elicoidi, aventi a comune colla prima l' asse ed il passo.

Supponiamo infatti nei punti di una linea di curvatura C di un' elicoide condotte le tangenti alle linee di curvatura dell' altro sistema. Per la proprietà suesposta queste rette invilupperanno una linea G, che sarà il luogo dei centri geodetici della C. Diamo ora alla linea di curvatura C ed al sistema delle tangenti considerate quel moto elicoidale, col quale l' elicoide stessa è stata generata. La C occuperà successivamente le posizioni delle linee di curvatura del suo sistema (C), il sistema delle tangenti le posizioni dei sistemi analoghi per le altre linee di curvatura del sistema (C), e la linea G quelle dei successtvi luoghi dei centri geodetici delle linee di curvatura stesse. La G genererà quindi la superficie dei centri geodetici del sistema C di linee di curvatura. Adunque questa superficie è un' elicoide, avente a comune colla primitiva l' asse ed il passo e per profilo una evoluta G della linea di curvatura C.

§. XIX. Per dare un esempio consideriamo l' elicoide (27) a curvatura costante negativa e cerchiamone la superficie dei centri geodetici relativa al sistema di linee di curvatura piane (trattrici). (*)

(*) In quanto alla superficie dei centri geodetici relativa all' altro

Vedremo che questa elicoide dei centri geodetici può essere generata dalla stessa curva (elica di un cilindro a base catenaria) che genera l' elicoide ad area minima, differendo da quest' ultima solo per il moto elicoidale, e invero sì per il passo delle eliche che pel loro senso.

Parte di questi risultati possono prevedersi geometricamente, osservando, che la superficie elicoidale dei centri geodetici ammette, come profilo, una evoluta della linea di curvatura, a cui i centri geodetici sono relativi (§. precedente). Nel nostro caso ammetterà quindi, come profilo, una evoluta della trattrice; ma la trattrice ha per evoluta piana la catenaria, quindi, per un noto teorema (*) ogni altra sua evoluta è un' elica del cilindro retto, che ha per base la catenaria stessa.

Converrà però condurre la ricerca anche analiticamente, poichè, ottenute le coordinate di queste nuove elicoidi, potremo anche ricercare quali sono le superficie di rivoluzione applicabili sopra di essa, ricerca che ci condurrà a semplici risultati.

Le coordinate ξ, η, ζ di queste elicoidi dei centri geodetici saranno date da:

$$\xi = x - \rho_v X_u \ , \quad \eta = y - \rho_v Y_u \ , \quad \zeta = z - \rho_v Z_u \ ,$$

dove x, y, z hanno i valori (27), ρ_v è il raggio di curvatura geodetica delle $v=$cost. quindi per la (27')

$$\rho_v = \frac{A}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{senh}(u+v) \ ,$$

sistema di linee di curvatura sferica è facile accertarsi, che si riduce all' asse dell' elicoide.

(*) V. p. e. Serret Calcul. Différentiel. §. 298.

ed X_u, Y_u, Z_u sono i coseni di direzione delle tangenti alle $u =$ cost. Effettuando i calcoli si trova:

$$(31)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{A}{a\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{senh}(u+v)\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} - \dfrac{A}{a}\cosh(u+v)\,\mathrm{sen}\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ \eta = \dfrac{A}{a\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{senh}(u+v)\,\mathrm{sen}\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} + \dfrac{A}{a}\cosh(u+v)\cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ \zeta = -\dfrac{A}{a}(u+v) + \dfrac{A}{a}\,v. \end{cases}$$

Queste sono adunque le elicoidi cercate. Esse ammettono come profilo la curva:

$$x = \frac{A}{a\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{senh}\,\omega\ ,\quad y = \frac{A}{a}\cosh\omega\ ,\quad z = -\frac{A}{a}\,\omega,$$

la quale è un' elica del cilindro, che la proietta sul piano yz , cilindro a base catenaria, come si era previsto geometricamente. L' angolo, che quest' elica forma colle generatrici ha per coseno $\dfrac{1}{a}$,

Confrontando queste formole con quelle relative alle elicoidi ad area minima (m. t. §. 24), si vede facilmente, che hanno luogo le proprietà enunciate sopra. Se poi si confrontano queste formole colle (79') del §. XVI, si vede che, quando $\sqrt{a^2-1}=1$, cioè quando il passo dell'elicoide a curvatura costante negativa è eguale alla circonferenza, che ha per raggio la distanza della cuspide della trattrice dall'assintoto, le formole confrontate non differiscono, che pei segni delle due prime coordinate Ciò mostra che: *nel caso supposto la superficie complementare e la superficie dei centri geodetici delle trattrici per le elicoidi a curvatura costante negativa*

sono elicoidi identiche, che si ottengono l'una dall'altra con una rotazione di due angoli retti intorno all'asse.

§. XX. Cerchiamo ora la superficie di rivoluzione applicabile sopra l'elicoide (31). Prendendo a linee coordinate le $u+v=\omega$ e le v, si trova con un semplice calcolo la formola:

$$ds^2=\frac{A^2}{a^2-1}\cosh^2\omega d\omega^2-2\frac{A^2}{\sqrt{a^2-1}}d\omega dv+\frac{A^2}{a^2-1}\left\{\operatorname{senh}^2\omega+a^2-1\right\}dv^2$$

che dà l'elemento lineare dell'elicoide (31). Prendendo invece a linee coordinate le ω e le traiettorie ortogonali t, si otterrà (m. t. §. 4):

$$ds^2=\frac{A^2}{a^2-1}\,\frac{\operatorname{senh}^2\omega(\operatorname{senh}^2\omega+a^2)}{\operatorname{senh}^2\omega+a^2-1}d\omega^2+(\operatorname{senh}^2\omega+a^2-1)dt^2.$$

Confrontando questo elemento lineare coll'ordinario:

$$ds^2=\left\{1+\varphi'^2(r)\right\}dr^2+k^2r^2dt^2$$

delle superficie di rivoluzione, si avrà, per determinare la curva meridiana $z=\varphi(r)$, l'equazione differenziale:

$$1+\varphi'^2(r)=\frac{A^2k^2(k^2r^2+1)}{(a^2-1)\left\{k^2r^2-(a^2-2)\right\}}$$

e prendendo:

$$(32)\qquad k=\frac{\sqrt{a^2-1}}{A},$$

si avrà:

$$(33)\; z=\varphi(r)=\sqrt{a^2-1}\int\frac{dr}{\sqrt{k^2r^2-(a^2-2)}}=A\int\frac{d(kr)}{\sqrt{k^2r^2-(a^2-2)}}.$$

Ora giova distinguere due casi, quello in cui $a^2-2>0$ e quello in cui $a^2-2<0$. Rispetto all' elicoide del Dini (27) questi due casi si distinguono in ciò. Nel 1.° caso il passo dell' elicoide è maggiore della circonferenza, che ha per raggio la distanza della cuspide della trattrice dall' assintoto, nel 2.° minore.

Se siamo nel 1.° caso, la (33) dà:

$$z = \mathrm{A}\ \mathrm{sett}\cosh\frac{kr}{\sqrt{a^2-2}},$$

ossia per la (32):

$$(34) \qquad r = \mathrm{A}\frac{\sqrt{a^2-2}}{\sqrt{a^2-1}}\cosh\frac{z}{\mathrm{A}}\ .$$

Questa curva deriva dalla catenaria come l' ellisse dal cerchio. Basta proiettare la catenaria comune $r=\mathrm{A}\cosh\frac{z}{\mathrm{A}}$ sopra un piano, che passa per l' asse z ed è inclinato sul piano della catenaria di un angolo $\alpha=\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{\sqrt{a^2-2}}$.

Nel primo caso adunque l' elicoide (31) è applicabile sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano la curva (34) e quindi (*m. t.* §. 7) è anche applicabile sull' elicoide, la cui sezione normale all' asse è una spirale logaritmica.

Nel 2.° caso si trova invece:

$$r = \mathrm{A}\frac{\sqrt{2-a^2}}{\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{senh}\frac{z}{\mathrm{A}}\ .$$

Questa curva è il meridiano della superficie di rivoluzione applicabile sull' elicoide (31) nel caso, che ora con-

sideriamo. Si vede facilmente, che essa è composta di un solo ramo estendentesi all'infinito dalle due parti dell'asse di rotazione, al quale volge sempre la sua convessità, flettendosi nel punto ove l'incontra. Da ultimo osserviamo, che nel caso intermedio in cui $a^2 - 2 = 0$, la (33) dà:

$$z = A \log r \ ,$$

che è la stessa curva logaritmica, meridiano della superficie di rivoluzione applicabile sull' elicoide complementare dell' elicoide del Dini (V. §. XVI). Ciò è ben naturale dopo quanto abbiamo detto al §. precedente.

§. XXI. Per bene intendere la generazione seguente di una classe di elicoidi applicabili sulla superficie di rivoluzione a curvatura media costante (superficie, che ha per meridiano la curva generata dal fuoco di un' ellisse o di un iperbola, che rotola senza strisciare sull' asse), è d' uopo premettere alcune considerazioni sulle deformazioni di superficie di rivoluzione, che si conservano di rivoluzione (*).

Quando due superficie di rivoluzione sono applicabili l' una sull' altra è impossibile coprire coll' una interamente l' altra.

Se l' elemento lineare della prima S è:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

e quello della seconda S':

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 r^2 dv_1^2$$

e si suppone $\lambda > 1$, per trasformare S' in S conviene ta-

(*) V. Bour-Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l' École Polytechnique Tome XXII.

gliare da S′ una porzione compresa fra due meridiani, indi flettendo S′ ricongiungere gli orli del taglio, dandole di nuovo la forma di superficie di rivoluzione. Allora S′ diventa S″.

E infatti, per trasformare i due elementi lineari l'uno nell'altro, conviene porre $v = \lambda v_1$, e quando l'angolo v è già diventato 2π, v_1 non è che $\frac{2\pi}{\lambda} < 2\pi$, poichè $\lambda > 1$.

Ciò posto, cerchiamo delle elicoidi applicabili sulla superficie di rivoluzione a curvatura media costante $\frac{1}{c}$, superficie il cui elemento lineare si riduce facilmente alla forma (m. t. §. 26):

$$ds^2 = du^2 + \left(1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2c}\right) dv^2, \text{ dove } a < 1.$$

Per trovarle effettivamente converrà determinarne il profilo meridiano $z = \varphi(\rho)$, il che si farà per mezzo della condizione, che l'elemento lineare (m. t. §. 7):

$$ds^2 = \left\{1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2}\right\} d\rho^2 + k^2 (\rho^2 + m^2) dv^2$$

sia trasformabile nel precedente.

Con un processo ben noto si troverà, per determinare $\varphi(\rho)$, la equazione differenziale;

$$1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2} = \frac{4 c^2 k^2 \rho^2}{\{a^2 - 1 + k^2 (\rho^2 + m^2)\}\{1 - k^2 (\rho^2 + m^2)\}}$$

e, disponendo delle arbitrarie m, k in modo, che si abbia:

$$a^2 - 1 + k^2 m^2 = 0 \ , \ 4 c^2 k^2 - 1 + k^2 m^2 = 0,$$

ossia prendendo

$$(35)\qquad k=\frac{a}{2c}\ ,\quad m=\frac{2c\sqrt{1-a^2}}{a}\ ,$$

avremo :

$$\varphi'^2(\rho)=\frac{k^2(\rho^2+m^2)}{1-k^2(\rho^2+m^2)}\ .$$

Quindi, indicando con u l'arco della curva $z=\varphi(\rho)$,

$$\frac{du}{d\rho}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2(\rho^2+m^2)}}\ ,$$

da cui integrando;

$$(36)\qquad \rho=\frac{\sqrt{1-k^2m^2}}{k}\ \text{sen}\,(k\,u)\ .$$

Considerando questa curva, come meridiano di una superficie di rivoluzione, fra le sue deformate vi è certamente il cerchio :

$$\rho=\frac{1}{k}\ \text{sen}\,(k\,u)\ .$$

Il modulo λ per passare dalla curva (36) a questo cerchio è $\lambda=\frac{1}{\sqrt{1-k^2m^2}}>1$. E, siccome per le (34) delle cinque quantità a, c, m, k, λ due sono arbitrarie, ma le altre ne conseguono, possiamo enunciare il teorema seguente:

Da una sfera di raggio qualunque, supposta flessibile ed inestendibile, si tagli una porzione compresa

fra due meridiani, facenti fra loro un angolo arbitrario. Indi, flettendo la sfera, le si dia di nuovo la forma di superficie di rivoluzione, ricongiungendo gli orli dei tagli. Se al meridiano così ottenuto si dà un moto elicoidale conveniente intorno all'asse, si genererà un' elicoide applicabile sopra una superficie di rivoluzione a curvatura media costante.

Se R è il raggio della sfera, α l' angolo del fuso sferico, che si toglie, avremo:

$$R = \frac{1}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{2\pi - \alpha},$$

ed il parametro m del moto elicoidale e la curvatura media $\frac{1}{c}$ della superficie di rivoluzione, applicabile sul-l' ellcoide generata, saranno dati dalle formole:

$$m = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}, \quad \frac{1}{c} = \frac{4\pi}{R(2\pi - \alpha)}.$$

Questo modo di generazione di una classe di elicoidi applicabili sulla superficie di rivoluzione a curvatura media costante mi sembra tanto più notevole, in quanto che è precisamente dai profili meridiani delle deformate di rivoluzione della sfera, che si può partire per ottenere il meridiano di una superficie di rivoluzione a curvatura media costante (Bour — *l. c.*).

Questo meridiano è una curva parallela ai precedenti profili e distante da essi del raggio della sfera. Fondandosi su questa proprietà, è facile persuadersi, che si può dare dei profili derivati della sfera la seguente elegante generazione:

Intorno ad uno dei fuochi di un' ellisse o di un' iper-

bola, come centro, si descriva un cerchio di raggio eguale all' asse maggiore dell'ellisse, o all' asse trasverso dell' iperbola; indi si faccia rotolare senza strisciare l' ellisse o l' iperbola sopra una retta. La superficie di rivoluzione che ha per asse questa retta e per meridiano l'inviluppo del cerchio descritto intorno al fuoco, è applicabile sulla sfera, il cui cerchio massimo è il cerchio stesso.

Pag. 296 *Nota* leggasi: *Le superficie di rivoluzione generate* ec.
» 308 linea 1 aggiungasi questa osservazione:

Se si prendesse a considerare un sistema qualunque di geodetiche di 2.ª specie non ortogonali ad un medesimo meridiano, si otterrebbero per le superficie complementari formole, che non differirebbero dalle (14) altro che pel segno di k^2. Possiamo dunque dire che mutando k^2 in $-k^2$ nelle (14) si ottiene una classe di superficie applicabili sulla superficie di rivoluzione logaritmica. Si vede quindi che le formole (14) compendiano in se le tre classi di superficie complementari, di cui abbiamo parlato al §. III. La prima classe corrisponde a $k=0$, la seconda a k puramente immaginario, la terza a k reale.

» 308. linea 4 leggasi $v = \mathrm{A}$ tangh $\frac{u_1}{\mathrm{A}} e^{-v_1}$

» 317 l'ultimo termine della formola (21) va letto così

$$(a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) dv^2_m$$

R



